Kloostermanin summat ja spektraaliteoria

Niko Vuokko

Pro gradu -tutkielma
Lokakuu 2006

UNIVERSITY OF TURKU
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FIN-20014 TURKU
FINLAND

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

VUOKKO, NIKO: Kloostermanin summat ja spektraaliteoria
Pro gradu -tutkielma, 59 s.
Matematiikka
Lokakuu 2006

Operaattorin spektri määrää voimakkaasti operaattorin käyttäytymistä, mutta sen avulla voidaan tutkia myös avaruuksien rakennetta. Tässä työssä käytetään hyväksi aikanaan Hans Maassin aluilleen panemaa ja siitä lähtien voimakkaan kehityksen kohteena ollutta hyperbolisen Laplacen operaattorin Δ spektraaliteoriaa.

Hajottamalla automorfifunktioiden avaruus $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ Δ:n spektriä vastaten osiin voidaan erityisesti automorfisia Poincarén sarjoja käsitellä aivan uudella tavalla. Vanhaa ja uutta teoriaa yhdistelemällä päädytään tässä esityksessä yllättäviin yhteyksiin holomorfisten kärkimuotojen ja Maassin muotojen välillä, joissa yhdistävänä komponenttina toimivat Kloostermanin summat. Tämän teorian kehitti alkujaan N. V. Kuznetsov vuonna 1977, mutta tämä esitys seurailee Y. Motohashin yksinkertaistamaa päättelyä vuodelta 1997.

Kääntämällä teorian rakenne toisin päin päästään tutkimaan Kloostermanin summia. Jatkona työlleen Kuznetsov todistikin mullistavan tuloksen tietyille Kloostermanin summien summille. Tämä tulos esitetään tässä esityksessä yhdistämällä se laajempaan ympäröivään teoriaan Goldfeldin ja Sarnakin vuoden 1983 päättelyä seuraillen.

Asiasanat: Kloostermanin summat, Maassin muodot, holomorfiset kärkimuodot, Laplacen operaattorin spektraaliteoria, Poincarén sarjat.

Sisältö

Merkintöjä

Lukujoukkojen merkinnät $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ vastaavat yleisiä käytäntöjä. Positiivisten kokonaislukujen joukolle käytetään lisäksi merkintää $\mathbb{Z}_+$ ja luonnollisina lukuina pidetään joukkoa $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Negatiivisten kokonaislukujen joukkoa merkitään $\mathbb{Z}_- = \{-n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Tässä esityksessä kompleksimuuttujat s ja z hajotetaan reaali- ja imaginaariosiinsa muodoiksi $s = \sigma + it$ ja $z = x + iy$, missä $\sigma, t, x, y \in \mathbb{R}$, ellei toisin mainita. Merkinnällä ε tarkoitetaan aina jotain mielivaltaisen kokoista positiivista vakiota, eikä sen arvo välttämättä säily samana laskuissa.

Ordo-merkintöjä $\mathcal{O}$ ja o käytetään tavanomaisessa mielessä. Lyhenteenä merkinnälle $f = \mathcal{O}(g)$ käytetään usein muotoa $f \ll g$.

Merkinnällä $C^k(E)$, $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ tarkoitetaan joukossa E määriteltyjä funktioita, jotka differentioituvat k kertaa E:ssä.

Ryhmän G aliryhmän H (ei välttämättä normaali) suhteen otettuja vasempien ja oikeiden sivuluokkien joukkoja merkitään $H\backslash G$ ja G/H.

Merkintä $\delta_{m,n}$ viittaa yleiseen tapaan Kroneckerin deltaan:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{, jos } m = n, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Funktioilla $\zeta(s)$ ja $\Gamma(s)$ tarkoitetaan tekstissä luonnollisesti koko kompleksitasoon meromorfifunktioiksi analyyttisesti jatkettuja Riemannin zeta-funktiota sekä Eulerin gamma-funktiota. Eksponenttifunktiolle käytetään lyhennysmerkintää $e(z) = e^{2\pi i z}$. Funktion $f : A \to B$ rajoittumaa joukkoon $A_0 \subset A$ merkitään $f|_{A_0} : A_0 \to B$.

Tämä esitys käyttää avukseen voimakkaasti funktioteoriaa ja niinpä monin paikoin integraaleja manipuloidaan siirtämällä integrointiteitä paikasta toiseen kompleksitasossa. Integrointiteiden siirrossa vanha ja uusi integrointitie täydennetään ylimääräisillä muodoltaan yksinkertaisilla käyrillä suljetuksi silmukaksi, jolloin tuloksena syntyvä integraali voidaan laskea residylauseen avulla. Lisäksi siirron vaikutuksia arvioitaessa tulee laskea integraali yli täydentävien tienpätkien. Ellei esityksessä toisin mainita, tämän integraalin ja mahdollisista navoista saatavien residyjen vaikutus integrointitien siirrossa on nolla ja lyhyyden nimissä nämä tässä esityksessä yksinkertaiset huomiot jätetään erikseen mainitsematta.

Merkinnällä

$$\int_{(\alpha)} f$$

tarkoitetaan, että integraali lasketaan yli äärettömän tien $\gamma(s) = \alpha + is$, $s \in \mathbb{R}$. Lisäksi tässä on aina voimassa $\alpha \in \mathbb{R}$.

Summamerkillä

$$\sum_{h \pmod{l}}^{*}$$

tarkoitetaan, että summaus käy läpi kaikki välin $[1, l]$ kokonaisluvut, joille pätee $\text{syt}(h, l) = 1$. Nämä luvut samastetaan äärellisen ryhmän $\mathbb{Z}_l^*$ jäännösluokkien kanssa. Lisäksi merkinnällä $\overline{h}$ tarkoitetaan luvun h käänteislukua $h^{-1} \pmod{l}$.

Johdanto

Hyperbolisen Laplacen operaattorin ja sen muunnelmien spektraaliteoria on 1900-luvun loppupuolelta lähtien näytellyt erittäin tärkeää osaa analyyttisen lukuteorian kehityksessä. Erityisesti automorfifunktioiden teorian kehitys, Maassin muodot ja näiden yhteys holomorfisiin modulimuotoihin ovat luoneet hyvin runsaan pohjan niin algebralliselle kuin analyyttisellekin kehitykselle lukuteoriassa. Eräänä syynä tähän kaikkeen on myös uusien ideoiden alta paljastuva yhteys jo paljon tutkittuun L-funktioiden teoriaan. Teorian voimakkaimmat kehittäjät ovat olleet sen aluille panija Hans Maass, Atle Selberg, Hans Petersson ja Walter Roelcke.

Toisena voimakkaana kehityssuuntana lukuteoriassa on ollut 1900-luvun alusta lähtien eksponenttisummat. Tämän suuntauksen käynnistäjänä toimi Fourier-sarjojen kertoimien tutkimiseen tarkoitettu Hardyn-Littlewoodin ympyrämenetelmä. Siinä funktion

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e(nz)$$

Fourier-kerrointa $a(n)$ tutkitaan hajottamalla sen integraaliesitys

$$a(n) = \int_0^1 f(z) e(-nz) dz$$

jollain tavalla paloihin. Weylin kriteeri lukujoukon tasaiselle jakautumiselle oli menetelmän ensimmäisiä menestyksiä, tosin eittämättä suurin niistä on I. M. Vinogradovin vuoden 1937 todistus ternääriselle Goldbachin otaksumalle.

Jo alusta lähtien ympyrämenetelmää pyrittiin usein eri tavoin parantamaan. Ramanujan ehdotti ensimmäisenä integraalin hajottamista osiin Fareyn jonojen mukaan. Tässä muodostuu kuitenkin ongelmaksi välien eri mittaisuus ja nimittäjien koon vaihtelu. Hendrik Kloosterman nousi kuuluisuuteen vuonna 1926, kun hän sovelsi kehittämäänsä tasoitusmenetelmää näihin ongelmiin ja onnistui näin todistamaan osittain neliömuotojen teoriaan liittyvän Hilbertin 11. ongelman.

Kloostermanin laskut johtivat hänet arvioimaan erityistä eksponenttisummaa

$$S(m,n;l) = \sum_{h \pmod{l}}^{*} e\Big(\frac{mh + n\overline{h}}{l}\Big),$$

joka on siitä lähtien kantanut nimeä Kloostermanin summa. Tälle summalle on löydetty useita aritmeettisia muunnoksia ja siitä on tullut tärkeä perustyökalu erityisesti analyyttisessa lukuteoriassa. Eräs syy tähän on juuri Kloostermanin summien tärkeys niin holomorfisten kuin automorfistenkin kärkimuotojen spektraaliteoriassa.

Kuten tullaan esityksessä huomaamaan, tämä yhteys toimii myös toiseen suuntaan ja spektraaliteoria onkin edistänyt Kloostermanin summien teoriaa mittavasti. Näitä edistysaskelia taas käyttämällä muita Kloostermanin summia soveltavia lukuteorian tuloksia on voitu ratkaisevasti parantaa. Tätä kautta automorfifunktiot ja Kloostermanin summat ovat raivanneet tiensä entistä voimakkaammin koko lukuteorian keskeisimpien käsitteiden joukkoon.

Kuznetsovin saavutukset spektraaliteorian saralla saivat aikaan suuren innostuksen analyyttisen lukuteorian tutkimuksessa ja menetelmille kehitettiin suuri määrä erilaisia sovelluksia. Niistä tärkeimpiä on H. Iwaniecin kehittämä spektraaliseulan menetelmä, jota on menestyksellisesti käytetty moniin tarkennuksiin multiplikatiivisissa ongelmissa ja Riemannin zeta-funktion keskiarvojen arvioissa. Sitä hyödynnetään myös Bakerin, Harmanin ja Pintzin vuoden 2001 todistuksessa sille, että välillä $[x - x^{0{,}525}, x]$ on aina alkuluku, kun x on tarpeeksi suuri.

1 Tarpeellisia perustietoja

Määritellään kompleksitason ylempi puolikas $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Se varustetaan epäeuklidisella (hyperbolisella) metriikalla $d\mu(z) = |dz|/y$.

Määritellään *erityinen lineaariryhmä*

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}$$

ja merkitään Γ:lla sen tekijäryhmää $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm E\}$, missä E on yksikkömatriisi. Tätä ryhmää kutsutaan usein *täydeksi moduliryhmäksi*. Kuten yleensäkin, samastetaan matriisialkio

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{Möbiuksen kuvauksen} \quad \frac{az+b}{cz+d}$$

kanssa. (Itse asiassa Γ ja Möbiusten kuvausten ryhmä ovat isomorfisia.) $\mathbb{H}$:n metriikka μ on tunnetusti invariantti kuvausten $\gamma \in \Gamma$ suhteen.

Tässä esityksessä käsitellään vain täyteen moduliryhmään liittyviä modulimuotoja ja automorfifunktioita. Näillä on erityisominaisuutena se, että kärkiä voi olla vain yksi ja tällöinkin se sijaitsee pisteessä $z = \infty$. Määritellään tähän kärkeen liittyvä stabilisaattoriryhmä

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\infty) = \infty\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Koko automorfifunktioiden teorian eräs tärkeä käsite on *hyperbolinen Laplacen operaattori*

$$\Delta = -y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big).$$

Tämä operaattori on Γ-invariantti hyperbolisen metriikan suhteen eli $\forall\gamma \in \Gamma : (\Delta(f \circ \gamma))(z) = (\Delta f)(\gamma(z))$, kuten voidaan helposti todeta Cauchyn-Riemannin yhtälöitä käyttäen.

Tarpeeseen tulee myös seuraava lause:

Lause 1.1 (Greenin lause). *Olkoot f ja g kahdesti jatkuvasti derivoituvia alueessa G ja merkitään ∇:lla ja Δ:lla euklidisia gradienttia ja Laplacen operaattoria:*

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big), \qquad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Tällöin on voimassa

$$\int_G \nabla f \cdot \nabla g \, dm + \int_G f \Delta g \, dm = \oint_{\partial G} f \nabla g \cdot da, \tag{1.1}$$

missä mitat a ja m perustuvat tavanomaiseen G:n euklidiseen metriikkaan.

Tähän liittyen kannattaa huomata, että myös hyperbolinen ulkonormaaliderivaatta

$$y\frac{\partial}{\partial n} = y\Big(\frac{dy}{|dz|}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{|dz|}\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

on Γ-invariantti metriikan μ suhteen.

Dirichlet'n sarjoiksi kutsutaan funktioita

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ : a_n \in \mathbb{C}.$$

Näiden multiplikatiivisessa lukuteoriassa tärkeiden funktioiden perusteoriasta tarvitaan seuraava holomorfisten funktioiden maksimiperiaatteen sovellus. (Todistusta varten katso [HR].)

Lause 1.2 (Phragménin-Lindelöfin periaate). *Olkoon Dirichlet'n sarja $f(s)$ säännöllinen ja polynomiaalista kertalukua vyössä $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$. Oletetaan lisäksi, että vyön reunoilla ovat voimassa arviot*

$$f(s) = \mathcal{O}(|t|^{k_1}), \text{ kun } \sigma = \beta_1 \text{ ja}$$
$$f(s) = \mathcal{O}(|t|^{k_2}), \text{ kun } \sigma = \beta_2.$$

Tällöin kaikilla $\beta_1 \leq \sigma \leq \beta_2$ on tasaisesti voimassa suuruusarvio

$$f(s) = \mathcal{O}(|t|^{k(\sigma)}),$$

missä $k(x)$ on arvot $k(\beta_1) = k_1$ ja $k(\beta_2) = k_2$ saava lineaarinen funktio.

Kloosterman tarvitsi tutkimuksissaan epätriviaalia arviota summilleen ja hän todistikin niille ylärajan $S(m,n;l) \ll l^{3/4}$. Parikymmentä vuotta myöhemmin André Weil todisti algebrallisten käyrien teoriaa käyttäen Kloostermanin summille parhaan mahdollisen suuruusarvion

Lause 1.3 (Weilin raja).

$$|S(m,n;l)| \leq l^{1/2} d(l) \operatorname{syt}(m,n,l)^{1/2}, \tag{1.2}$$

missä $d(n)$ on tavanomaiseen tapaan tekijäfunktio.

1.1 Operaattorin spektri

Normialgebroihin tai operaattorianalyysiin liittyvä spektrin käsite on usein hyödyllinen avaruuksien rakennetta tai lineaarikuvausten toimintaa tutkittaessa. Esimerkiksi lineaarialgebrassa tärkeä matriisin Lagrangen normaalimuoto on itse asiassa vain kyseisen matriisin spektraalihajotelma.

Normiavaruuden E lineaarioperaattorin $A : E \to E$ *resolventtijoukoksi* määritellään

$$\begin{aligned}\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda) &\text{ on bijektio ja} \\ &(A-\lambda)^{-1} \text{ on rajoitettu lineaarioperaattori}\},\end{aligned}$$

missä λ:lla merkitään samalla myös operaattoria $\lambda I : E \to E$, joka kertoo annetun alkion vakiolla λ. Operaattorin *spektriksi* määritellään joukko $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$. Operaattoriin liitetään myös sen *resolventtioperaattorit* $\mathcal{R}_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1}$.

Luku λ voi kuulua spektriin $\sigma(A)$ eri syistä ja spektri jaetaankin erityyppisiin osiin näiden syiden mukaan. Operaattorin A *ominaisarvoiksi* määritellään ne luvut $\lambda \in \mathbb{C}$, joille $(A - \lambda)$ ei ole injektio. Niiden muodostamaa osaa kutsutaan *pistespektriksi* ja sitä merkitään $\sigma_p(A)$. Pistespektrin kohdalla kuvausta $(A - \lambda)^{-1}$ ei voida edes määritellä.

Lukuja $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_p(A)$, joille pätee $\overline{(A - \lambda)E} = E$, kutsutaan A:n *jatkuvaksi spektriksi* $\sigma_c(A)$. Tällöin $(A - \lambda)^{-1}$ on tosin olemassa, mutta se ei ole rajoitettu. Jäljelle jäävää osaa $\sigma_r(A)$ kutsutaan *jäännösspektriksi* tai *puristespektriksi*, koska se puristaa avaruutta kasaan: $\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \overline{(A - \lambda)E} \neq E$.

Pistespektrin ja jatkuvan spektrin alkioita kutsutaan toisinaan *yleistetyiksi ominaisarvoiksi* ja niiden unioni voidaan määritellä ekvivalentisti:

$$\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} : \begin{cases} \|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja} \\ \|(A - \lambda)x_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{cases}$$

Operaattorin spektriä kutsutaan *puhtaasti diskreetiksi* (diskreetti spektri on eräs lähes pistespektriä vastaava spektrin osa), jos joistain operaattorin ominaisarvoja vastaavista ominaisvektoreista voidaan muodostaa avaruuden E kanta.

Tässä esityksessä tarpeeseen tulee lähinnä joitain erityistietoja Hilbertin avaruuden operaattoreiden spektristä.

Lemma 1.4. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $A : H \to H$ lineaarioperaattori.*

(i) Jos A on itseadjungoitu eli $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \forall x, y \in H$, niin

$$\sigma(A) \neq \emptyset, \quad \sigma_p(A) \subset \mathbb{R} \ \ ja \ \ \sigma_r(A) = \emptyset.$$

(ii) Jos A on kompakti operaattori, niin A:n spektri koostuu numeroituvasta määrästä ominaisarvoja ja lisäksi enintään luvusta nolla.

Hyvänä johdatuksena tähän hyvin laajaan aiheeseen toimivat lähteet [Ar], [Bi] ja [He]. Erityisesti näistä viimeinen kunnostautuu erittäin selkeänä ja helposti seurattavana esityksenä.

1.2 Modulimuodot ja -funktiot

Meromorfista funktiota $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, joka on meromorfinen myös pisteessä $z = \infty$, kutsutaan *painoa k olevaksi modulifunktioksi*, jos $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma(z) = (az+b)/(cz+d) : f(\gamma(z)) = (cz+d)^k f(z)$. Holomorfista (myös, kun $z = \infty$) modulifunktiota kutsutaan tavanomaisesti *modulimuodoksi*. Modulifunktiota f, jolle on voimassa $\lim_{\Im z \to \infty} f(z) = 0$, kutsutaan *kärkifunktioksi*, *kärkimuodot* määritellään vastaavasti.

Painoa nolla olevia modulifunktioita (eli Γ-invariantteja funktioita) kutsutaan *automorfifunktioiksi*. Vakiofunktiot ovat Liouvillen lauseen perusteella ainoita automorfisia modulimuotoja. Lisäksi huomataan helposti, että nollafunktio on ainoa parittoman painon modulifunktio. Tämän vuoksi tässä tekstissä funktioiden paino k oletetaan aina parilliseksi.

Merkitään painoa k olevien modulimuotojen avaruutta $M_k(\Gamma)$:lla tai lyhyesti M_k:lla. Kärkimuotojen avaruutena pidetään $S_k(\Gamma)$:a tai S_k:ta.

Määritellään avuksi $\mathcal{F}' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, |\Re z| \leq 1/2\}$. Tämän jälkeen määritellään alueeksi $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \backslash (\partial \mathcal{F}' \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z < 0\})$. Tunnetusti $\mathcal{F}$ on täyden moduliryhmän Γ perusalue. Perusalue on riippuvainen transformaatioryhmästä (tässä tekstissä Γ), jossa operoidaan. Perusalueen $\mathcal{F}$ mitta on $\mathrm{Vol}(\mathcal{F}) = \pi/3$ Gaussin-Bonnet'n kaavan perusteella.

Modulifunktioiden avaruudessa voidaan määritellä *Peterssonin sisätulo*

$$\langle f_1, f_2 \rangle_k = \int_{\mathcal{F}} f_1(z)\overline{f_2(z)} y^k d\mu(z),$$

missä, kuten muuallakin, merkitään $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Vektoriavaruudet M_k ja S_k ovat äärellisulotteisia ja niiden ulottuvuuksille on tiedossa helpohkosti todistettavissa oleva yksinkertainen kaava (katso [KK]):

Lause 1.5 (Dimensiokaava). *Olkoon $k \geq 0$ parillinen (muulloin $\dim M_k = \dim S_k = 0$). Tällöin on voimassa kaavat*

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor, & \textit{kun } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1, & \textit{kun } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \end{cases}$$

$$\dim S_k = \dim M_k - 1, \quad \textit{kun } k \geq 4.$$

Tämän lisäksi S_k on Peterssonin sisätulolla varustettuna Hilbertin avaruus, kuten helposti todetaan muiden L^2-avaruuksien tapaan.

1.3 Erikoisfunktiot

Esitellään oleellisimmat gamma-funktioon liittyvät identiteetit ja kaavat.

Lause 1.6.

$$\forall s \in \mathbb{C}: \quad s\Gamma(s) = \Gamma(s+1), \quad \textit{ja} \tag{1.3}$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \tag{1.4}$$

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}, \quad \textit{kun } \Re\alpha, \Re s > 0, \tag{1.5}$$

$$\forall s \in \mathbb{C}: \quad 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2s). \tag{1.6}$$

Kaavasta (1.4) seuraa välittömästi $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Gamma-funktion läheinen sukulainen on beta-funktio

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

jolle on voimassa muun muassa seuraava integraaliesitys

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx, \quad \text{kun } \Re\alpha, \Re\beta > 0. \tag{1.7}$$

Sijoittamalla tähän kaavaan $\alpha = 1/2, \beta = s-1/2, \Re s > 1/2$ saadaan seuraava gamma-funktion integraalikaava:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^s} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}. \tag{1.8}$$

Lause 1.7 (Stirlingin kaava). *Kaikilla $\delta > 0$ alueessa $|\arg s| \le \pi - \delta$ on voimassa kaava*

$$\log\Gamma(s) = (s - \frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \mathcal{O}(\frac{1}{|s|}). \tag{1.9}$$

Tästä seuraa erityisesti, että vyössä $A \le \sigma \le B$, $A, B \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned} \Gamma(\sigma+it) &= \sqrt{2\pi} t^{\sigma-1/2+it} e^{-(\pi/2)t - it + i(\pi/2)(\sigma-1/2)}(1+\mathcal{O}(1/t)), \\ |\Gamma(\sigma+it)| &= \sqrt{2\pi} t^{\sigma-1/2} e^{-(\pi/2)t}(1+\mathcal{O}(1/t)), \end{aligned} \tag{1.10}$$

kun $t \to \infty$.

Määritellään *yleinen tekijäfunktio*

$$d_k(n) = \sum_{\substack{d_1,d_2,\ldots,d_k \in \mathbb{Z}_+ \\ d_1 d_2 \cdots d_k = n}} 1$$

kaikille kokonaisluvuille $k \ge 2$ ja *yleinen tekijöiden summafunktio*

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s,$$

missä $s \in \mathbb{C}$. Funktiota $d(n) = d_2(n) = \sigma_0(n)$ kutsutaan yleensä yksinkertaisesti tekijäfunktioksi. Tekijöiden summalle on olemassa Dirichlet'n sarjojen esitys

$$\sigma_s(n) = \zeta(1-s)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(n)}{k^{1-s}}, \tag{1.11}$$

kun $n > 0$ ja $\Re s < 0$. Tämä kaava löytyy lähteestä [HW], lause 292. Tässä $c_k(n)$ on *Ramanujanin summa*

$$c_k(n) = S(n,0;k) = \sum_{h \pmod k}^{*} e\Big(\frac{nh}{k}\Big).$$

Riemannin zeta-funktio $\zeta(s)$ toteuttaa koko kompleksitasossa funktionaaliyhtälön

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s). \quad (1.12)$$

Ottamalla huomioon residyn $\mathrm{Res}(\zeta(s), 1) = 1$ voidaan tästä johtaa

$$\zeta(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\sin(\pi s/2)\zeta(1-s)}{\pi} = -\frac{1}{2}.$$

Lisäksi pidetään tunnettuna zeta-funktion erityisarvoa $\zeta(2) = \pi^2/6$ ja kokoarviota suoralla $\Re s = 1$:

$$\zeta(1+it) \gg (\log|t|)^{-1}, \quad \text{kun } |t| \to \infty. \quad (1.13)$$

Besselin funktiot ovat alun perin saaneet alkunsa Besselin differentiaaliyhtälöiden ratkaisuina. Seuraavassa esitetään niiden teoriaa siinä määrin kuin on tarvetta tämän tekstin puitteissa. Lyhyt ja ytimekäs johdanto aiheeseen löytyy kirjasta [Le], perin tyhjentävää esitystä varten kannattaa tarttua järkäleeseen [Wa].

Yleinen *Besselin J-funktio* (ensimmäisen lajin Besselin funktio) voidaan määritellä kompleksi-integraalina, joka seuraa välittömästi J-funktioiden generoivan funktion suljetusta muodosta:

Määritelmä 1.8.

$$\forall \nu, z \in \mathbb{C}: \quad J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} e^{z(t-t^{-1})/2} t^{-\nu-1} dt, \quad (1.14)$$

missä $\mathcal{C}$ on jokin kerran origon positiiviseen suuntaan kiertävä suljettu tie.

Lemma 1.9. *Kaikilla $x > 0$ ja $\Re\nu > -1/2$ on voimassa esitys*

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\nu-1/2}\cos(xy)\,dy. \quad (1.15)$$

Kaikilla $x > 0$ ja $1/2 - \Re\nu < \beta < 1/2$ on voimassa esitys

$$J_{2\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\beta)} \frac{\Gamma(\eta - 1/2 + \nu)}{\Gamma(3/2 - \eta + \nu)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta} d\eta. \quad (1.16)$$

Kaikilla $x \geq 0$ ja $\nu \geq 0$ on voimassa

$$J_\nu(x) \ll \min\{1, \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\}, \tag{1.17}$$

missä symboliin $\ll$ sisältyvä vakio ei riipu k:sta tai x:stä.

Määritelmä 1.10. *Besselin K-funktio K_ν* (muunnettu toisen lajin Besselin funktio) määritellään yleensä paloittain "imaginaarisen argumentin" Besselin funktiona, mutta käytännöllisyyden nimissä määritellään se tässä eräänä integraaliesityksistään:

$$(\forall \nu \in \mathbb{C})(\forall y \in \mathbb{C}, \Re y > 0) : K_\nu(y) = \int_0^\infty e^{-y\cosh t} \cosh(\nu t)\, dt.$$

Lemma 1.11. *Besselin funktiolle K_ν on voimassa kaikilla $\nu \in \mathbb{C}$ ja $y > 0$ esitys*

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho^{\nu-1} \exp(-\frac{1}{2}y(\rho + \rho^{-1}))d\rho. \tag{1.18}$$

Besselin funktio $K_\nu(y)$ on ν:n kokonainen parillinen funktio, kun $\Re y > 0$. Se toteuttaa kaikilla kiinnitetyillä $\nu \in \mathbb{C}$ asymptoottisen yhtälön

$$K_\nu(y) = (1 + o(1))\Big(\frac{\pi}{2y}\Big)^{1/2} e^{-y}, \quad \textit{kun } y \to \infty. \tag{1.19}$$

Kaikilla $x \in \mathbb{C}$ ja $|\Re \nu| < \beta$ on voimassa

$$K_{2\nu}(x) = \frac{1}{4\pi i}\int_{(\beta)} \Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2s} ds. \tag{1.20}$$

Kaikilla $y > 0$ ja $\Re \nu > 0$ on voimassa

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2\pi i x y}}{(x^2+1)^s} dx = \frac{2\pi^s y^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi y)}{\Gamma(s)}. \tag{1.21}$$

1.4 Mellinin muunnos

Lause 1.12 (Mellinin muunnos). *Oletetaan, että integraali*

$$\int_0^\infty |f(x)| x^{s-1} dx$$

suppenee, kun $s \in (a,b)$. Tällöin on voimassa integraalimuunnospari

$$
\begin{aligned}
(Mf)(s) &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx, \\
f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} (Mf)(s)x^{-s}ds,
\end{aligned}
$$

kun $\Re s, \alpha \in (a,b)$. Funktio Mf on funktion f Mellinin muunnos. Kaavoja kutsutaan vastaavasti Mellinin muunnokseksi ja käänteismuunnokseksi.

Gamma-funktion määritelmästä seuraa välittömästi Mellinin käänteismuunnos

$$
e^{-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \Gamma(\eta)t^{-\eta}d\eta, \tag{1.22}
$$

missä $\alpha > 0$.

Lemma 1.13. *Oletetaan, että $\Re(s-\nu) > 0$. Tällöin on voimassa Mellinin muunnos*

$$
\int_0^\infty e^{-y}K_\nu(y)y^{s-1}dy = 2^{-s}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\nu)\Gamma(s+\nu)}{\Gamma(s+1/2)}. \tag{1.23}
$$

TODISTUS. Sijoitetaan vasemman puolen integraaliin K_ν:n esitys (1.18) ja vaihdetaan integroimisjärjestystä. Tuloksesta tunnistetaan beta-funktion integraaliesitys (1.7) ja lopuksi käytetään kahdennuskaavaa (1.6):

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y}K_\nu(y)y^{s-1}dy &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho^{\nu-1}\int_0^\infty y^{s-1}\exp(-\frac{1}{2}y(\rho^{1/2}+\rho^{-1/2})^2)dy\,d\rho \\
&= 2^{s-1}\Gamma(s)\int_0^\infty \rho^{s+\nu-1}(1+\rho)^{-2s}d\rho \\
&= 2^{s-1}\Gamma(s)\frac{\Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu)}{\Gamma(2s)} \\
&= 2^{-s}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu)}{\Gamma(s+1/2)}.
\end{aligned}
$$

□

Eräs hyvin tärkeä Mellinin muunnoksen sovellus on Perronin kaava ja erityisesti sen katkaistu versio. Tämä kaava on pääosassa esimerkiksi alkulukulauseen todistuksessa. Seuraavassa esitettävä versio Perronin kaavasta löytyy lähteestä [Br], lause 1.4.2.

Lause 1.14 (Katkaistu Perronin kaava). *Supetkoon Dirichlet'n sarja*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

itseisesti suoralla $\Re s = c > 0$. *Merkitään lisäksi*

$$A(x) = {\sum_{1 \le n \le x}}' a(n),$$

missä pilkku summamerkissä tarkoittaa, että tapauksessa $x \in \mathbb{Z}$ *luvulla* $a(x)$ *on paino* $1/2$. *Olkoon vielä*

$$A_x = \max_{\frac{3}{4}x \le n \le \frac{5}{4}x} |a(n)|.$$

Tällöin ehdolla $x, T \ge 2$ *on voimassa kaava*

$$\begin{aligned} A(x) = &\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) \frac{x^s}{s} \, ds \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{x^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^c} + A_x \left(1 + \frac{x \log x}{T} \right) \right). \end{aligned} \tag{1.24}$$

2 Hyperbolinen Laplacen operaattori

Määritellään avaruudeksi $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ kaikkien niiden Γ:n suhteen automorfisten funktioiden f joukko, joille pätee

$$\|f\|^2 = \int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty.$$

Tunnetusti $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ on Hilbertin avaruus Peterssonin sisätulon suhteen. Määritellään myös

$$B^\infty(\mathcal{F}) = \big\{ f \in C^\infty(\mathcal{F}) \mid f^{(\nu)}(z) \ll y^{-A} \quad \forall A > 0, \forall \nu \in \mathbb{Z}_+, \text{ kun } z \to \infty \big\},$$

missä tavanomaisesti $f^{(\nu)}$ on f:n ν:s derivaatta. Tämä avaruus sisältää kaikki monistossa $\mathcal{F}$ kompaktisti tuetut funktiot, josta seuraa yksinkertaisella konstruoinnilla $\overline{B^\infty(\mathcal{F})} = L^2(\mathcal{F}, d\mu)$.

Lemma 2.1. *Laplacen operaattori Δ on symmetrinen avaruudessa $B^\infty(\mathcal{F})$. Lisäksi Δ on positiivinen operaattori eli $\langle \Delta f, f \rangle > 0$ kaikilla ei-vakioilla $f \in B^\infty(\mathcal{F})$.*

Todistus. Olkoon $f_1, f_2 \in B^\infty(\mathcal{F})$ ja $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \le Y\}$. Tällöin Greenin lausetta (∇ on normaali euklidinen gradientti), ulkonormaalin invarianssia ja tietoa $f_1, f_2 \in B^\infty(\mathcal{F})$ käyttäen

$$\begin{aligned}
\langle \Delta f_1, f_2 \rangle &= \lim_{Y\to\infty} \int_{\mathcal{F}_Y} \Delta f_1(z) \overline{f_2(z)} d\mu(z) \\
&= \lim_{Y\to\infty} \int_{\mathcal{F}_Y} \nabla f_1(z) \cdot \overline{\nabla f_2(z)}\, dxdy - \lim_{Y\to\infty} \int_{\partial\mathcal{F}_Y} y \frac{\partial f_1}{\partial n}(z) \overline{f_2(z)} \frac{|dz|}{y} \\
&= \int_{\mathcal{F}} \nabla f_1(z) \cdot \overline{\nabla f_2(z)}\, dxdy - \lim_{Y\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x+iY) \overline{f_2(x+iY)} dx \\
&= \int_{\mathcal{F}} \nabla f_1(z) \cdot \overline{\nabla f_2(z)}\, dxdy = \langle f_1, \Delta f_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Positiivisuus seuraa tämän avulla välittömästi yhtälöstä

$$\langle \Delta f, f \rangle = \int_{\mathcal{F}} |\nabla f|^2\, dxdy.$$

$\square$

Seuraus 2.2. *Laplacen operaattorin* Δ *laajennus sulkeumaan* $\overline{B^\infty(\mathcal{F})} = L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ *on itseadjungoitu ja* $\forall f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu) : \langle \Delta f, f \rangle \geq 0$. *Lisäksi on voimassa* $\sigma(\Delta) \subset \mathbb{R}$.

TODISTUS. Ensimmäiset kaksi väitettä seuraavat lemmasta välittömästi yksinkertaisella jonotarkastelulla. Kolmas väite saadaan lemmasta 1.4 käyttämällä hyväksi Δ:n positiivisuutta. Kyseisen lemman mukaan $\sigma_r(\Delta) = \emptyset$, joten Δ:n spektri koostuu pelkistä yleistetyistä ominaisarvoista. Toisin sanoen

$$s \in \sigma(\Delta) \Leftrightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+} : \|f_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } \lim_{n \to \infty} \|(\Delta - s) f_n\| = 0.$$

Tehdään vastaoletus $s \in \sigma(\Delta)$ ja $\Im s \neq 0$. Valitaan funktio $f : \|f\| = 1$, $\|(\Delta - s) f\| < |\Im s|$ ja käytetään Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä:

$$|\Im s| \leq \left| \langle \Delta f, f \rangle - s \|f\|^2 \right| = \left| \langle (\Delta - s) f, f \rangle \right| \leq \|(\Delta - s) f\| \cdot \|f\| < |\Im s|.$$

Väite seuraa tästä ristiriidasta. □

2.1 Maassin aaltomuodot

Lause 2.3. *Olkoon* $f \in C^2(\mathcal{F}) \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ *ja* $\Delta f = (1/4 + \kappa^2) f$, $\Im \kappa \geq 0$. *Jos* $\kappa = i/2$, *niin* f *on vakiofunktio. Jos taas* $\kappa \neq i/2$, *niin* $\forall z \in \mathbb{H}$

$$f(z) = y^{1/2} \sum_{n \neq 0} \rho(n) K_{i\kappa}(2\pi |n| y) e(nx),$$

missä luvut $\rho(n)$ *ovat joitain kompleksilukuja. Täten myös* $f \in B^\infty(\mathcal{F})$. *Jos* $\kappa \neq i/2$, *niin* $\kappa \in \mathbb{R}$ *ja* $\kappa \geq \sqrt{3\pi^2/2 - 1/4} > 3{,}815$.

TODISTUS. Todistus sivuutetaan, katso [Mo], lemma 1.4. Ideana siinä on huomata, että f:n Fourier-kertoimet toteuttavat ehdon $\Delta f = (1/4 + \kappa^2) f$ perusteella tietyn Besselin differentiaaliyhtälön, minkä jälkeen jäljellä on enää muutamia teknisiä viilauksia.

Jatkossa esitettävä spektraalilause sanoo, että edellisessä lauseessa esitellyt Δ:n ominaisarvot $\lambda = 1/4 + \kappa^2 \neq 0$ muodostavat välin $[3\pi^2/2, \infty)$ diskreetin lukujoukon. Myöhemmin huomataan myös, että tämä joukko on ääretön. Niinpä nämä luvut λ voidaankin numeroida kasvavassa järjestyksessä $\lambda_j = 1/4 + \kappa_j^2$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Jokaista ominaisarvoa λ_j kohden valitaan jokin kyseisen ominaisavaruuden alkio ψ_j, jolle $\|\psi_j\| = 1$. Näitä funktioita kutsutaan *Maassin aaltomuodoiksi* tai *Maassin muodoiksi*. Edellisen lauseen perusteella Maassin muodoilla on esitys

$$\psi_j(z) = y^{1/2} \sum_{n \neq 0} \rho_j(n) K_{i\kappa_j}(2\pi|n|y)e(nx). \tag{2.1}$$

Kertoimia $\rho_j(n)$ kutsutaan *Maassin-Fourierin kertoimiksi.*

Lemma 2.4. *Maassin muodot ovat ortogonaalisia ja siis* $\{\psi_j \mid j \in \mathbb{Z}_+\}$ *on ortonormaali systeemi.*

TODISTUS. Operaattori Δ on $B^\infty(\mathcal{F})$:ssä symmetrinen, joten mielivaltaisilla $j, j_0 \in \mathbb{Z}_+$:

$$(\lambda_j - \lambda_{j_0})\langle\psi_j, \psi_{j_0}\rangle = \langle\lambda_j\psi_j, \psi_{j_0}\rangle - \langle\psi_j, \lambda_{j_0}\psi_{j_0}\rangle = \langle\Delta\psi_j, \psi_{j_0}\rangle - \langle\psi_j, \Delta\psi_{j_0}\rangle = 0.$$

$\square$

2.2 Spektraalilause

Spektraaliteorian ideana on selittää jonkin operaattorin $T : E \to F$ (E, F Banachin avaruuksia) käyttäytyminen sen spektrin avulla. Yleisessä spektraaliteoriassa tulosta, joka määrittää operaattorin spektrin, kutsutaan *spektraalilauseeksi*. Tällaisesta lauseesta seuraa myös aina lähtöavaruuden rakenteelle hajotelma, jossa esiintyvät spektrin eri osat.

Edellisessä osiossa valittiin Laplacen operaattorin pistespektriä vastaavan aliavaruuden kannaksi Maassin muotojen ortonormaali joukko. Jos $\mathcal{F}$ olisi kompakti hyperbolisessa metriikassa tai Δ olisi kompakti operaattori, tämä riittäisikin, sillä lemman 1.4 mukaan Hilbertin avaruuden kompaktin operaattorin spektri koostuu pistespektrin lisäksi enintään luvusta nolla.

Näin ei kuitenkaan ole kärjen $z = \infty$ vuoksi, joten myös muut spektrin osat on tutkittava. Itseadjungoituna Hilbertin avaruuden operaattorina Δ:n jäännösspektri on tyhjä joukko, joten riittää tutkia enää jatkuvaa spektriä.

Keskeisenä asiana jatkuvan spektrin tutkimisessa ovat erityiset seuraavassa luvussa määriteltävät automorfiset Eisensteinin sarjat $E(z,s)$. Erikoista on, että huolimatta tärkeydestään jatkuvan spektrin kannalta, Eisensteinin sarjat ovat itse Δ:n ominaisfunktioita. Niillä ei kuitenkaan ole äärellistä normia eivätkä ne täten kuulu avaruuteen $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$. Ratkaisuna tähän onkin siirtyä tutkimaan niin kutsuttuja epätäydellisiä Eisensteinin sarjoja, joiden tuki on kompakti.

Voidaan todistaa melko helposti (katso [IK]), että näiden epätäydellisten Eisensteinin sarjojen generoiman avaruuden ortogonaalikomplementti avaruudessa $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ on automorfisten kärkimuotojen muodostama avaruus $L_0^2(\mathcal{F}, d\mu)$. Lisäksi voidaan todistaa, että Laplacen operaattorin käänteisoperaattori on kompakti operaattori avaruudessa $L_0^2(\mathcal{F}, d\mu)$. Operaattoriteorian perusteella tästä seuraa, että Laplacen operaattorin spektri on puhtaasti diskreetti $L_0^2(\mathcal{F}, d\mu)$:ssa ja sen ominaisfunktiot generoivat tämän avaruuden.

Näin on pikaisesti perusteltu seuraava

Lause 2.5 (Laplacen operaattorin spektraalilause). *Merkitään $\mathfrak{D}$:llä Maassin aaltomuotojen generoimaa vektoriavaruutta ja $\mathfrak{E}$:llä epätäydellisten Eisensteinin sarjojen vektoriavaruutta*

$$\left\{ \lim_{T\to\infty} \int_0^T p(t)E(z, 1/2+it)dt \;\middle|\; p \in L^2(0,\infty) \right\},$$

missä raja-arvo lasketaan avaruudessa $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$.

Automorfisten funktioiden avaruudelle $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ on voimassa Laplacen operaattorin spektraalihajotelma

$$L^2(\mathcal{F}, d\mu) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{E}.$$

Laplacen operaattorin Δ rajoittuman $\Delta|_{B^\infty(\mathcal{F})}$ pistespektri on diskreetti lukujoukko.

Määritellään $\psi_0 \in L^2(\mathcal{F}, d\mu), \forall z \in \mathbb{H} : \psi_0(z) = Vol(\mathcal{F})^{-1/2} = (3/\pi)^{1/2}$. Olkoon lisäksi

$$\mathcal{E}(t,f) = \lim_{Y\to\infty} \int_{\mathcal{F}_Y} f(z)E(z, 1/2-it)d\mu(z),$$

missä raja-arvo lasketaan avaruudessa $L^2(0,\infty)$*. Jokainen* $f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ *voidaan esittää spektraalihajotelmana:*

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{E}(t, f) E(z, 1/2 + it) dt.$$

Tästä seuraa Parsevalin kaava

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f_1, \psi_j \rangle \overline{\langle f_2, \psi_j \rangle} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{E}(t, f_1) \overline{\mathcal{E}(t, f_2)} dt. \tag{2.2}$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan, katso [Mo], s. 13-39. Operaattoriteoriaa hyväksi käyttävä lyhyempi ja teoriaa paremmin valaiseva todistus tälle löytyy kirjasta [Iw1]. Kirja [IK] tarjoaa tästä todistuksesta hyvän esittelyn, joka tarjoaa pikaisen katsauksen alla piilevään teoriaan.

3 Poincarén sarjat

Automorfiset Maassin muodot määriteltiin jo edellisessä luvussa, mutta ilman mitään selkeää tietoa niiden Maassin-Fourierin kertoimista $\rho_j(n)$. Jotta spektraalilausetta voitaisiin kunnolla hyödyntää, tarvitsemme jonkin eksplisiittisesti määritellyn automorfifunktion, jota käsitellä. Funktion automorfisuus liittyy sen muuntumiseen ryhmän Γ alkioiden vaikutuksesta. Kuten ryhmäteoriassa usein, tätäkin muuntumista voidaan hallita ottamalla keskiarvo kaikista mahdollisista eri muunnostyypeistä.

Määritelmä 3.1. Kaikilla $m \in \mathbb{N}$ määritellään ensin symbolisesti *Poincarén sarja*

$$P_m(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\Im \gamma(z))^s e(m\gamma(z)), \quad z \in \mathbb{H},\ \Re s > 1,$$

missä summattaessa γ käy läpi jonkin sivuluokkien edustajiston. Erityisesti määritellään *Eisensteinin sarjat*

$$E(z,s) = P_0(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\Im \gamma(z))^s, \quad z \in \mathbb{H},\ \Re s > 1.$$

Välittömästi huomataan, että Poincarén sarjan summattavat termit eivät riipu suoraan γ:sta, vaan pelkästään sen sivuluokasta. Tästä seuraa myös $P_m(z,s)$:n Γ-automorfisuus z:n suhteen.

Jotta todellakin olisimme löytäneet eksplisiittisen automorfifunktion, kyseisen funktion tulee olla ylipäätään äärellisenä olemassa. Tämän osoittamista varten merkitään ensinnäkin $\gamma, \eta \in \Gamma :\ \gamma(z) = (az+b)/(lz+h),\ \eta(z) = (a'z+b')/(l'z+h'),\ l, l' \geq 0$, jolloin helposti saadaan

$$\eta\gamma^{-1} \in \Gamma_\infty \Leftrightarrow lh' = l'h \Leftrightarrow (l = l' \text{ ja } h = h') \text{ tai } \eta, \gamma \in \Gamma_\infty$$

ehdon $\mathrm{syt}(l,h) = \mathrm{syt}(l',h') = 1$ avulla. Tämän lisäksi

$$\forall l > 0 : \gamma(z) = \frac{a}{l} - \frac{1}{l(lz+h)} \text{ ja } ah \equiv 1 \pmod{l}. \tag{3.1}$$

Siispä Poincarén sarja voidaan hajottaa seuraavasti merkittäessä $z = x + iy$

ja $\overline{h} \equiv h^{-1} \pmod{l}$:

$$\begin{aligned}
P_m(z,s) &= y^s e(mz) + y^s \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=-\infty \\ (h,l)=1}}^{\infty} |lz+h|^{-2s} e\Big(\frac{m\overline{h}}{l}\Big) \exp\Big(-\frac{2\pi mi}{l(lz+h)}\Big) \\
&= y^s e(mz) + y^s \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,l)=1}}^{l} e\Big(\frac{m\overline{h}}{l}\Big) \\
&\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} |z+h/l+n|^{-2s} \exp\Big(-\frac{2\pi mi}{l^2(z+h/l+n)}\Big). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Käyttämällä sisimpään summaan Poissonin summakaavaa, poistamalla integrandista sijoituksin x:n ja h:n vaikutukset ja lopuksi vaihtamalla summausjärjestystä saavutaan lopulta muotoon

$$\begin{aligned}
P_m(z,s) &= y^s e(mz) + y^{1-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nx) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{2s}} S(m,n;l) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-2\pi ny\rho i - \frac{2\pi m}{l^2 y(1-i\rho)}\Big)(1+\rho^2)^{-s} d\rho. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Summausjärjestyksen vaihdon laillisuus tässä voidaan todeta siirtämällä integrointi tielle $\Im\rho = -\operatorname{sgn}(n)/2$, jolloin ongelmallisen n-summan käyttäytyminen selkenee ja summan itseinen suppeneminen tulee ilmi.

Esitetään vielä jatkossa tarvittava lause Eisensteinin sarjojen teoriasta.

Lause 3.2. *Eisensteinin sarja $E(z,s)$ on s:n suhteen meromorfinen koko kompleksitasossa kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Sille on voimassa esitys*

$$\begin{aligned}
E(z,s) &= y^s + \varphi_\Gamma(s) y^{1-s} \\
&\quad + \frac{2\pi^s\sqrt{y}}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \sum_{n\neq 0} |n|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|n|) K_{s-1/2}(2\pi|n|y) e(nx), \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

missä

$$\varphi_\Gamma(s) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-1/2)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)} = \frac{\pi^{2s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}.$$

Lisäksi $E(z,s)$ on s:n suhteen säännöllinen alueessa $\Re s \geq 1/2$ lukuun ottamatta yksinkertaista napaa pisteessä $s = 1$. Residy tässä pisteessä on $3/\pi$.

Eisensteinin sarja toteuttaa myös funktionaaliyhtälöt

$$E(z,s) = \varphi_\Gamma(s)E(z,1-s) \quad \textit{ja}$$
$$\Delta E(z,s) = s(1-s)E(z,s).$$

Todistus. Sijoitetaan yhtälöön (3.3) $m = 0$ ja otetaan termi $n = 0$ erilleen. Esitys (3.4) seuraa tästä arvoille $\Re s > 1$, kun tapauksessa $n = 0$ käytetään kaavoja (1.8) ja (1.12) ja muutoin kaavoja (1.21) ja (1.11).

Esityksestä (3.4) ja asymptoottisesta kaavasta (1.19) seuraa myös välittömästi funktion $f(s) = E(z,s)$ analyyttinen jatko meromorfifunktioksi koko kompleksitasoon.

Esityksen (3.4) termi $\varphi_\Gamma(s)y^{1-s}$ tuottaa Eisensteinin sarjalle yksinkertaisen navan pisteeseen $s = 1$, jossa residyksi saadaan

$$\mathrm{Res}(E(z,s), s=1) = \lim_{s\to 1} \frac{\pi(s-1)\zeta(2s-1)}{\pi^2/6} = \frac{3}{\pi}.$$

Ensimmäinen funktionaaliyhtälöistä seuraa, kun kaavaan (3.4) sijoitetaan $s = 1-k$ sekä käytetään Besselin K-funktion parillisuutta ja zeta-funktion funktionaaliyhtälöä (1.12).

Toinen differentiaaliyhtälö osoitetaan todeksi huomaamalla, että Laplacen operaattorin Γ-invarianssin perusteella

$$\Delta((\Im\gamma(z))^s) = s(1-s)(\Im\gamma(z))^s$$

ja käyttämällä tätä tietoa $E(z,s)$:n määritelmään. $\square$

3.1 Rankinin-Selbergin levitysmenetelmä

Koko tämän esityksen eräänä päätavoitteena on saada lisätietoa Maassin-Fourierin kertoimista $\rho_j(n)$. Ne vaikuttavat varmastikin jotenkin kahden automorfifunktion sisätuloon, kun tämä sisätulo lasketaan Parsevalin kaavan (2.2) avulla. Jotta tästä huomiosta hyödyttäisiin, pitää sama sisätulo saada esitettyä myös jollain muulla tavalla.

Niinpä seuraavissa kahdessa osiossa keskitytäänkin esittämään Poincarén sarjojen sisätulo kahdella eri tavalla. Ensin tämä tehdään erityisellä Rankinin-

Selbergin levitysmenetelmällä, joka hyödyntää näiden funktioiden automorfisuutta ja tietoa Γ:n alkioiden toiminnasta $\mathbb{H}$:ssa. Toisessa vaiheessa sama sisätulo lasketaan Parsevalin kaavan (2.2) avulla. Myöhemmissä luvuissa näistä vaiheista seuraavaa yhtälöä hyödynnetään sieventämällä sitä erinäisten erityisoletusten vallitessa.

Kaavaa (3.3) katsottaessa voidaan arvella, että Kloostermanin summat tulevat esiintymään myös Poincarén sarjojen sisätulon kaavassa. Näin tuleekin käymään ja juuri tämän vuoksi lähes kaikki spektraaliteoriaan liittyvä teoria on läpikyllästetty Kloostermanin summilla.

Lemma 3.3. *Olkoon* $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$ *sekä*

$$\Re s_2 + \alpha > \Re s_1 > \alpha + 3/4.$$

Määritellään lisäksi

$$W(x; s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\eta + s_2 - s_1)}{\Gamma(\eta + s_2)\Gamma(s_1 - \eta)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2\eta} d\eta.$$

Tällöin Poincarén sarjojen sisätulolle on voimassa esitys

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle &= \delta_{m,n}\Gamma(s_1 + s_2 - 1)(4\pi m)^{1-s_1-s_2} \\ &+ 2^{2(1-s_2)}\pi^{s_1-s_2+1} n^{s_1-s_2}\Gamma(s_1 + s_2 - 1) \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s_1} S(m, n; l) W(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}; s_1, s_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Todistus. Ensiksi etsitään ehdot, joilla $P_m(z, s) \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$. Weilin rajasta (1.2) seuraa kaksoissumman (3.3) itseinen suppeneminen, kunhan $\Re s > 3/4$ ja $m \geq 1$. Tällöin $P_m(z, s)$ on s:n säännöllinen funktio ja sille pätee $\mathcal{F}$:ssä arvio $P_m(z, s) \ll y^{1-\Re s}$. Täten

$$\Re s > 3/4 \text{ ja } m \geq 1 \Rightarrow P_m(z, s) \in L^2(\mathcal{F}, d\mu). \tag{3.6}$$

Valitaan nyt $f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ ja $\Re s > 1, m \geq 1$. $P_m(z, s)$:n kokoarviosta ja f:n automorfisuudesta saadaan:

$$\begin{aligned}\langle f, P_m(\cdot, \overline{s})\rangle &\overset{*}{=} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \int_{\mathcal{F}} f(z)(\Im\gamma(z))^s e(-m\gamma(\overline{z}))d\mu(z)\\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \int_{\gamma(\mathcal{F})} f(z)(\Im z)^s e(-m\overline{z})d\mu(z)\\ &= \int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} f(z)e(-m\overline{z})y^{s-2}dxdy. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Vaiheessa * tehdyn summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihdon oikeellisuus voidaan tarkistaa Fubinin-Tonellin lausetta, hajotelmaa (3.1) ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä käyttämällä. Laskussa (3.7) tapahtuvaa perusalueen peilausta kutsutaan *Rankinin-Selbergin levitysmenetelmäksi* (engl. *Rankin-Selberg unfolding method*).

Erityisesti nyt ehdolla $\sigma_1, \sigma_2 > 1$, $\sigma_j = \Re s_j$

$$\langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle = \int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} P_m(z, s_1)e(-n\overline{z})y^{s_2-2}dxdy =$$

$$\delta_{m,n}\Gamma(s_1+s_2-1)(4\pi m)^{1-s_1-s_2} + \int_0^\infty y^{s_2-s_1-1}\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^{2s_1}}S(m,n;l)$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty \exp\Big(-2\pi ny(1+i\rho) - \frac{2\pi m}{l^2y(1-i\rho)}\Big)\frac{d\rho}{(1+\rho^2)^{s_1}}dy. \qquad (3.8)$$

Jotta suppeneminen tässä olisi itseistä, lisätään vielä vaatimus $\sigma_2 > \sigma_1 > 1$. Vaihtamalla integrointien ja summauksen järjestystä saadaan (3.8):n toiseksi termiksi

$$\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^{2s_1}}S(m,n;l)\int_{-\infty}^\infty (1+\rho^2)^{-s_1}Y_{s_2-s_1}(\rho;m,n,l)d\rho,$$

missä

$$Y_\omega(\rho;m,n,l) = \int_0^\infty y^{\omega-1}\exp\Big(-2\pi ny(1+i\rho) - \frac{2\pi m}{l^2y(1-i\rho)}\Big)dy.$$

Käyttämällä Mellinin käänteismuunnosta (1.22) seuraa tästä

$$\begin{aligned}Y_\omega(\rho;m,n,l) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty &y^{\omega-1}\exp(-2\pi ny(1+i\rho))\\ &\times \int_{(\alpha)} \Gamma(\eta)\Big(\frac{2\pi m}{l^2y(1-i\rho)}\Big)^{-\eta}d\eta\, dy,\end{aligned}$$

missä vaaditaan $\alpha > 0$ ja $|\arg(1 - i\rho)| < \pi/2$, jotta muunnos olisi olemassa. Kaksoisintegraali tässä suppenee itseisesti, jos $\Re\omega > -\alpha$. Tehdään lisäksi vielä rajoitus $|\arg(1 + i\rho)| < \pi/2$, jolloin integrointijärjestystä vaihtamalla ja kaavaa (1.5) käyttämällä seuraa helposti

$$Y_\omega(\rho; m, n, l) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi n)^{-\omega} \int_{(\alpha)} \Gamma(\eta)\Gamma(\eta + \omega)\Big(\frac{2\pi}{l}\sqrt{mn}\Big)^{-2\eta} \frac{(1 - i\rho)^\eta}{(1 + i\rho)^{\eta+\omega}}\, d\eta.$$

Nyt siis oletuksella $\alpha + \sigma_2 - \sigma_1 > 0$ saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \rho^2)^{-s_1} Y_{s_2 - s_1}(\rho; m, n, l) d\rho =$$

$$\frac{1}{2\pi i}(2\pi n)^{s_1 - s_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(\alpha)} \Gamma(\eta)\Gamma(\eta + s_2 - s_1)\Big(\frac{2\pi}{l}\sqrt{mn}\Big)^{-2\eta} \frac{(1 - i\rho)^{\eta - s_1}}{(1 + i\rho)^{\eta + s_2}}\, d\eta\, d\rho.$$

Käyttämällä Stirlingin kaavaa (1.10) viimeinen integrandi on $|\eta|$:n ja $|\rho|$:n ollessa suuria

$$\begin{aligned}&\ll |\rho|^{-\sigma_1 - \sigma_2} |\eta|^{2\alpha - \sigma_1 + \sigma_2 - 1} \exp\big(- \pi|\eta| + (\Im\eta)(\arg(1 + i\rho) - \arg(1 - i\rho))\big)\\ &\ll |\rho|^{-\sigma_1 - \sigma_2} |\eta|^{2\alpha - \sigma_1 + \sigma_2 - 1} \exp(-|\eta|/|\rho|).\end{aligned}$$

Siispä ehdolla $\alpha - \sigma_1 + 1/2 < 0$ integrointijärjestystä voidaan jälleen vaihtaa. Nyt voidaankin käyttää erästä gamma-funktioon liittyvää kaavaa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a + iu)^x (b - iu)^y} = \frac{2\pi}{(a + b)^{x+y-1}} \frac{\Gamma(x + y - 1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)},$$

kun $\Re x > 0$ ja $\Re(x + y) > 1$ (katso [Ni] s. 158). Täten ρ-integraali on yhtä kuin

$$\frac{2\pi}{2^{s_1+s_2-1}} \frac{\Gamma(s_1 + s_2 - 1)}{\Gamma(\eta + s_2)\Gamma(s_1 - \eta)},$$

mikä todistaa lemman. □

3.2 Parsevalin kaava

Toisena tapana laskea Poincarén sarjojen sisätulo esitellään tässä osiossa Parsevalin kaavan (2.2) käyttö. Tälläkin kertaa tarkkoja laskuja varten tarvitaan levitysmenetelmää, jolla vaikeiden integraalien kohdalla muuttujan z reaali- ja imaginaariosa saadaan eroteltua kahdeksi helposti erikseen käsiteltäväksi kokonaisuudeksi.

Lemma 3.4. *Olkoon $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $\Re s_1, \Re s_2 > 3/4$ ja määritellään lisäksi*

$$\Theta(s_1, s_2; r) = \Gamma(s_1 - 1/2 + ir)\Gamma(s_1 - 1/2 - ir)\Gamma(s_2 - 1/2 + ir)\Gamma(s_2 - 1/2 - ir).$$

Tällöin Poincarén sarjojen sisätulolle on voimassa spektraalihajotelma

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle = &\frac{\pi}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}(4\pi\sqrt{mn})^{1-s_1-s_2}\left(\frac{n}{m}\right)^{(s_1-s_2)/2} \times \\ &\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)\Theta(s_1, s_2; \kappa_j) \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)\cosh(\pi r)\Theta(s_1, s_2; r)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\, dr\Bigg).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Todistus. Ehdon 3.6 mukaan $P_m(z, s) \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$, kun $\Re s > 3/4$. Käyttämällä Parsevalin kaavaa (2.2) saadaan

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s_1), P_n(\cdot, \overline{s_2})\rangle = &\sum_{j=0}^{\infty} \langle P_m(\cdot, s_1), \psi_j\rangle \overline{\langle P_n(\cdot, \overline{s_2}), \psi_j\rangle} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(r, P_m(\cdot, s_1))\overline{\mathcal{E}(r, P_n(\cdot, \overline{s_2}))} dr.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Levitysmenetelmästä saatu (3.7) antaa

$$\langle P_m(\cdot, s), \psi_j\rangle = \int_0^{\infty}\int_{-1/2}^{1/2} \overline{\psi_j(z)} y^{s-2} e(mz) dx dy,$$

kun $\Re s > 1$. Erityisesti siis $\langle P_m(\cdot, s), \psi_0\rangle = 0$. Muille arvoille $j \geq 1$ käytetään ψ_j:n esitystä (2.1) ja Mellinin muunnosta (1.23):

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s), \psi_j\rangle &= \int_0^{\infty} y^{s-3/2} e^{-2\pi m y} \sum_{n \neq 0} \overline{\rho_j(n)} K_{i\kappa_j}(2\pi|n|y) \\ &\qquad \times \int_{-1/2}^{1/2} e((m-n)x) dx\, dy \\ &= (2\pi m)^{1/2-s}\overline{\rho_j(m)} \int_0^{\infty} y^{s-3/2} e^{-y} K_{i\kappa_j}(y) dy \\ &= \sqrt{\pi}(4\pi m)^{1/2-s}\overline{\rho_j(m)} \frac{\Gamma(s - 1/2 + i\kappa_j)\Gamma(s - 1/2 - i\kappa_j)}{\Gamma(s)}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Samalla lailla kaavoja (3.7), (3.4) ja (1.23) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} P_m(z,s)E(z,1/2-ir)d\mu(z) &= \int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} E(z,1/2-ir)e(mz)y^{s-2}dxdy \\ &= \frac{2\pi^{1/2-ir}m^{-ir}\sigma_{2ir}(m)}{\Gamma(1/2-ir)\zeta(1-2ir)} \int_0^\infty e^{-2\pi my}K_{-ir}(2\pi my)y^{s-3/2}dy \\ &= \frac{2\pi^{1/2-ir}m^{-ir}\sigma_{2ir}(m)}{\Gamma(1/2-ir)\zeta(1-2ir)}(2\pi m)^{1/2-s} \int_0^\infty e^{-k}K_{-ir}(k)k^{s-3/2}dk \\ &= 2^{2-2s}\pi(m\pi)^{1/2-s-ir}\sigma_{2ir}(m)\frac{\Gamma(s-1/2+ir)\Gamma(s-1/2-ir)}{\Gamma(s)\Gamma(1/2-ir)\zeta(1-2ir)}\end{aligned}$$

kun $\Re s > 1$ ja $r \in \mathbb{R}$. Viimeinen esitysmuoto edellä kuuluu Stirlingin kaavan ja arvion (1.13) perusteella avaruuteen $L^2(0,\infty)$ (muuttujan r suhteen). Poincarén sarja $P_m(\cdot,s)$ on kärkifunktio, joten tarkastelemalla $E(z,1/2-ir)$:n Fourier-kehitelmää (3.4) huomataan, että riippumatta s:n ja erityisesti r:n arvoista $P_m(z,s)E(z,1/2-ir) \to 0$ eksponentiaalisesti, kun $y \to \infty$. Tämä riittää todistamaan $L^2(0,\infty)$-suppenemisen seuraavassa laskussa:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(r,P_m(\cdot,s)) &= \lim_{Y\to\infty} \int_{\mathcal{F}_Y} P_m(z,s)E(z,1/2-ir)d\mu(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} P_m(z,s)E(z,1/2-ir)d\mu(z) \\ &= 2^{2-2s}\pi(m\pi)^{1/2-s-ir}\sigma_{2ir}(m)\frac{\Gamma(s-1/2+ir)\Gamma(s-1/2-ir)}{\Gamma(s)\Gamma(1/2-ir)\zeta(1-2ir)}.\end{aligned}$$

Tämän yhtälön, sisätulojen (3.11) ja yhtälön $\langle P_m(\cdot,s),\psi_0\rangle = 0$ molemmat puolet ovat holomorfisia, kun $\Re s > 3/4$. Yhtälöt ovat siis analyyttisen jatkamisen perusteella myös tällöin voimassa. Sijoittamalla nämä yhtälöt Parsevalin kaavaan (3.10) ja tekijöitä järjestelemällä saadaan lemman väite todistetuksi. □

Kaavasta (3.9) on helppoa erotella termit, jotka ovat saaneet alkunsa Laplacen operaattorin spektrin pisteittäisestä tai jatkuvasta osasta. Sama erottelu tavataan kaikissa tämän esityksen myöhemmissäkin kaavoissa. Tällöin esiin astuu levitysmenetelmän kautta myös kolmas osa, joka liittyy voimakkaasti Kloostermanin summien summaan.

4 Holomorfiset kärkimuodot

Holomorfisten kärkimuotojen avaruus S_k on $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$:n tavoin Hilbertin avaruus. Toisena yhteisenä elementtinä näillä on riippuvuus ryhmästä Γ. Ei olekaan siis ihme, että edellisen luvun tekniikat, Rankinin-Selbergin levitysmenetelmän ja Parsevalin kaavan hyödyntäminen, toimivat myös holomorfisten kärkimuotojen tapauksessa. Tapaukset ovat niin pitkälle analogiset, että jopa Kloostermanin summien summat esiintyvät niissä molemmissa. Vieläpä niin, että tätä holomorfisuuden rajat ylittävää Kloostermanin summien siltaa käyttäen saadaan osiossa 5.2 yhteys holomorfisten kärkimuotojen Fourierkerrointen ja Maassin muotojen Maassin-Fourierin kertoimien välille.

Tavoitteena on esittää edellisen luvun tavoin Poincarén sarjojen holomorfisten vastineiden sisätulo kahdella eri tavalla: levitysmenetelmällä ja Parsevalin kaavan avulla. Tuloksena tästä saadaan jälkiesitys tasoitetulle Kloostermanin summien summalle, mitä tullaan myöhemmin tarvitsemaan.

Merkitään $\vartheta(k) = \dim S_k$ ja kiinnitetään S_k:lle jokin ortonormaali kanta $\{\psi_{j,k} \mid 1 \leq j \leq \vartheta(k)\}$. Kannan alkioille kiinnitetään normalisoidut Fourier-esitykset

$$\psi_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{j,k}(n) n^{(k-1)/2} e(nz). \tag{4.1}$$

Tätä esitystä kutsutaan normalisoiduksi, koska kärkimuotojen tavanomaisten Fourier-kertoimien yleinen kokoluokka on $n^{(k-1)/2}$.

Huomautus 4.1. Yleensä kärkimuotojen avaruuden kantana pidetään niin sanottuja Hecken muotoja, koska niiden Fourier-kertoimet ovat multiplikatiivisia ja niiden määräämät Hecken operaattorien ominaisarvot ovat koko avaruuden rakenteen kannalta keskeisiä. Lisäksi P. Deligne on todistanut, että ”primitiivisten” Hecken muotojen Fourier-kertoimille $\lambda_f(n)$ on voimassa vahva versio Ramanujanin-Peterssonin otaksumasta: $|\lambda_f(n)| \leq d(n) n^{(k-1)/2}$. Hecken operaattorien teoriaa varten katso [Ap], [KK], [Ma] tai [Iw2].

Määritelmä 4.2. Otetaan käyttöön merkintä $j(\gamma, z) = cz + d$, missä $\gamma \in \Gamma, \gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$ ja $z \in \mathbb{H}$. Määritellään kaikille $m \in \mathbb{N}$ ja parillisille

$k \geq 4$ *holomorfinen Poincarén sarja*

$$U_m(z,k) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, z)^{-k} e(m\gamma(z)).$$

Funktiota $U_0(z,k) = E(z,k)$ kutsutaan *holomorfiseksi Eisensteinin sarjaksi.*

Nämä funktiot ovat läheisiä sukulaisia automorfisille Poincarén sarjoille, koska $\Im\gamma(z) = \Im z/|j(\gamma,z)|^2$. Funktioista U_m puuttuva kerroin $\Im z$ aiheuttaa sen, että kyseiset funktiot ovat modulaarisia painolla k, kuten helposti huomataan.

Tästä yhtäläisyydestä johtuen $U_m(z,k)$:lle saadaan johdettua Fourier-esitys samalla lailla kuin päädyttiin yhtälöön (3.3):

$$\begin{aligned} U_m(z,k) = e(mz) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nz) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-k} S(m,n;l) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-2\pi i n(\rho + iy) - \frac{2\pi i m}{l^2(\rho+iy)}\Big)(\rho+iy)^{-k} d\rho. \end{aligned}$$

Tällä kertaa tämän lausekkeen muokkausta voidaan kuitenkin jatkaa. Siirtämällä integrointi suoralle $\Im\rho = \infty$ huomataan, että integraali katoaa, kun $n \leq 0$. Arvoilla $n \geq 1$ integrointi siirretään suoralle $\Im\rho = -\infty$, jolloin jäljelle jää residyn laskeminen pisteessä $\rho = -iy$. Ilmeisin muutoksin ja määritelmän (1.14) avulla integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} \oint_{-\mathcal{C}} \exp\Big(-2\pi i n z - \frac{2\pi i m}{l^2 z}\Big) z^{-k} dz \overset{*}{=} \\ \frac{i}{l}\sqrt{\frac{m}{n}} \oint_{-\mathcal{C}} \exp\Big(\frac{2\pi}{l}\sqrt{mn}(s - s^{-1})\Big)\Big(\frac{i}{l}\sqrt{\frac{m}{n}} s\Big)^{-k} ds = \\ -2\pi i\Big(\frac{i}{l}\sqrt{\frac{m}{n}}\Big)^{-k+1} J_{k-1}\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big), \end{aligned}$$

missä $\mathcal{C}$ merkitsee jotain origon kertaalleen positiiviseen suuntaan kiertävää suljettua tietä ja kohdassa $*$ tehdään sijoitus $-ilz\sqrt{n/m} = s$. Siispä

$$U_m(z,k) = e(mz) + (-1)^{k/2} 2\pi m^{(1-k)/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-1)/2} q_{m,n}(k) e(nz), \tag{4.2}$$

missä Fourier-kertoimilla on esitys

$$q_{m,n}(k) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l) J_{k-1}\Big(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big). \tag{4.3}$$

Arvion (1.17) perusteella tämä viimeinen sarja suppenee itseisesti, kun $k \geq 2$, joten esitys (4.2) voidaan ottaa uudeksi $U_m(z,k)$:n määritelmäksi parillisille $k \geq 2$. $U_m(z,k)$:n Fourier-sarjasta huomataan myös, että nämä funktiot ovat (painon k) kärkimuotoja, kun $m \neq 0$ ja $k \geq 4$. Sama pätee tapaukselle $k = 2$, mutta tämä osoitetaan todeksi myöhemmin. Eisensteinin sarjat $E(z,k)$ sen sijaan eivät ole kärkimuotoja.

Tunnetusti $S_2(\Gamma)$ on nolla-avaruus ($M_2(\Gamma) = \mathbb{C}$), joten sijoittamalla kaavaan (4.2) arvo $k = 2$ saadaan eriskummallinen esitys luvulle nolla.

Seuraavaksi $q_{m,n}(k)$:lle lasketaan toinen esitys käyttäen hyväksi levitysmenetelmää ja Parsevalin kaavaa.

Lause 4.3 (Peterssonin jälkikaava). *Olkoon $\rho_{j,k}(n)$ kuten yhtälössä (4.1). Kaikille $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ja parillisille $k \geq 2$ on voimassa*

$$q_{m,n}(k) = (-1)^{k/2-1}\frac{\delta_{m,n}}{2\pi} + (-1)^{k/2}\frac{\pi}{(k-1)}a(k)\sum_{j=1}^{\vartheta(k)}\overline{\rho_{j,k}(m)}\rho_{j,k}(n), \tag{4.4}$$

missä $a(k) = 2^{1-2k}\pi^{-k-1}\Gamma(k)$.

Todistus. Aivan samoin kuin automorfisten Poincarén sarjojen kohdalla, saadaan laskettua sisätulo

$$\langle U_m(\cdot,k), f\rangle_k = \int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} \overline{f(z)}e(mz)dx\frac{dy}{y^{2-k}}, \tag{4.5}$$

kun $f \in S_k$ ja $k \geq 4$. Lasketaan tämän avulla $\langle U_m(\cdot,k), U_n(\cdot,k)\rangle_k$ sekä suoraan että toisaalta myös Parsevalin kaavaa

$$\langle U_m(\cdot,k), U_n(\cdot,k)\rangle_k = \sum_{j=1}^{\vartheta(k)}\langle U_m(\cdot,k), \psi_{j,k}\rangle_k\overline{\langle U_n(\cdot,k), \psi_{j,k}\rangle_k}$$

käyttämällä. Väite tapauksessa $k \geq 4$ seuraa tästä hyvin pikaisesti.

Valitaan nyt $k = 2$. Koska S_2 on nolla-avaruus, riittää osoittaa $q_{m,n}(2) = \delta_{m,n}/(2\pi)$. Määritellään apufunktio

$$U_m(z,2;s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} j(\gamma,z)^{-2}|j(\gamma,z)|^{-2s}e(m\gamma(z)),$$

joka on olemassa, kun $\Re s > 0$ (avataan summa samoin kuin (3.2):n ensimmäisessä vaiheessa). Sille saadaan jo tutulla tavalla Fourier-esitys

$$U_m(z,2;s) = e(mz) + \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2-2s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(m,n;l)e(nz)$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (\rho^2 + y^2)^{-s} \exp\Big(- 2\pi i n(\rho + iy) - \frac{2\pi i m}{l^2(\rho + iy)}\Big)(\rho + iy)^{-2} d\rho.$$

Siirtämällä integrointi tielle $\Im\rho = -y \operatorname{sgn}(n)/2$ saadaan tarkistettua, että integraalille on tasaisesti alueessa $\Re s > -1/2$ voimassa yläraja $\mathcal{O}(e^{3\pi ny})$, kun $n < 0$ ja $\mathcal{O}(e^{\pi ny})$, kun $n \geq 0$. Ottaen huomioon vielä Weilin rajan (1.2) nähdään, että $U_m(z,2;s)$ on s:n säännöllinen funktio, kun $\Re s > -1/4$. Lisäksi $\lim_{s\to 0} U_m(z,2;s) = U_m(z,2)$ Fourier-esityksen perusteella. Suoraan $U_m(z,2;s)$:n määritelmää käyttäen saadaan

$$U_m(\gamma(z),2;s) = j(\gamma,z)^2 |j(\gamma,z)|^{2s} U_m(z,2;s).$$

Tästä yhtälöstä ja määritelmästä (4.2) seuraa, että $U_m(z,2)$ on painon 2 kärkimuoto ja täten nollafunktio. Nyt tavoiteltu yhtälö $q_{m,n}(k) = \delta_{m,n}/(2\pi)$ seuraa suoraan samaisesta $U_m(z,2)$:n määritelmästä (4.2). □

Huomautus 4.4. Lauseen kaavaa (4.4) kutsutaan yleensä Peterssonin jälkikaavaksi. Siinä tulee esille hyvin avaruuden alkion jäljen kannasta riippumattomuus, funktioita $\psi_{j,k}$:han ei määritelty sen tarkemmin. Peterssonin jälkikaava esittää holomorfisten kärkimuotojen Fourier-kertoimet Kloostermanin summien avulla. Kuten seuraavassa luvussa huomataan, Maassin aaltomuotojen kohdalla on olemassa vastaavanlainen yhteys.

Holomorfiset Poincarén sarjat $U_m(z,k)$ määriteltiin kaikilla $k \geq 4$ kaikille $m \geq 1$. Kuitenkin avaruus S_k on äärellisulotteinen, joten näiden funktioiden välillä on runsaasti lineaarisia yhteyksiä. Itse asiassa on voimassa

Lause 4.5. *Holomorfiset Poincarén sarjat $U_m(z,k), m \geq 1$ generoivat koko avaruuden S_k, kun $k \geq 2$.*

TODISTUS. Tapaus $k = 2$ on triviaali, joten voidaan olettaa $k \geq 4$. Valitaan mielivaltainen $f \in M_k$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n)e(nz).$$

Tällöin sisätulo (4.5) voidaan laskea eksaktisti. Tulos muistuttaa voimakkaasti automorfisille Poincarén sarjoille laskettua kaavaa (3.11):

$$\begin{aligned}\langle f, U_m(\cdot, k)\rangle &= \int_0^\infty \int_{-1/2}^{1/2} f(z)e(-m\overline{z})dx \frac{dy}{y^{2-k}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) \int_0^\infty y^{k-2}e^{-2\pi(n+m)y}dy \int_{-1/2}^{1/2} e((n-m)x)dx \\ &= \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}}\, a_f(m).\end{aligned}$$

Tästä kaavasta huomataan, että ainoa kaikkia holomorfisia Poincarén sarjoja vasten kohtisuora kärkimuoto on nollafunktio. Muita vakiofunktioita vasten Poincarén sarjat ovat kohtisuoria. Täten Poincarén sarjojen generoima S_k:n aliavaruus $\mathfrak{P}$ on tiheä: $\overline{\mathfrak{P}} = S_k$. Itse S_k on äärellisulotteinen, joten sen kaikki aliavaruudet ovat suljettuja ja siis $S_k = \mathfrak{P}$. □

Huomautus 4.6. Myös Eisensteinin sarjoilla $E(z, k)$ on oma erityisasemansa modulimuotojen keskuudessa. Jokainen modulimuoto (painosta riippumatta) voidaan nimittäin esittää jonain funktioiden $E(z, 4)$ ja $E(z, 6)$ polynomina.

5 Spektraalihajotelmia

Edellisessä luvussa Kloostermanin summien summa $q_{m,n}(k)$ onnistuttiin esittämään avaruuden S_k ortonormaalin kannan avulla uudessa muodossa. Avaruuden S_k ortonormaalia hajotelmaa vastaava automorfifunktioiden spektraalilause 2.5 tarjoaa samanlaisen asetelman, jossa samankaltaiset Kloostermanin summien summat pystytään esittämään Laplacen operaattorin spektrin mukaan hajotettuina.

5.1 Jälkikaava

Tässä osiossa on tavoitteena löytää Peterssonin jälkikaavalle Maassin muotojen vastine, joka yhdistäisi spektrin osat Kloostermanin summien summaan. Tässäkin jälkikaavassa tulee lisäksi esiintymään diagonaalitermi, joka vastaa erikoistapausta $m = n$. Vastoin kuin holomorfisessa tapauksessa, nyt pistespektriä vastaavia Maassin muotoja onkin ääretön määrä (vertaa äärelliseen $\vartheta(k)$:hon). Tästä seuraa tiettyjä suppenemisongelmia, joita varten tarvitaan kokoarvio Maassin-Fourierin kertoimien summalle.

Lemma 5.1. *Olkoon luvut $\rho_j(n)$ Maassin-Fourierin kertoimia esityksen (2.1) tavoin. Niille on voimassa tasaisesti kaikilla $n \geq 1, K \geq 2, \varepsilon > 0$:*

$$\sum_{\kappa_j \leq K} \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi\kappa_j)} = \frac{1}{\pi^2}K^2 + \mathcal{O}(K \log K + Kn^{\varepsilon} + n^{1/2+\varepsilon}). \tag{5.1}$$

Todistus. Todistus sivuutetaan, sillä se on pitkähkö eikä sitä tässä tekstissä pääosin tarvita muuhun kuin suppenemistarkistuksiin. Todistus löytyy Kuznetsovin alkuperäisestä artikkelista [Ku]. Tarkempi arvio n:n suhteen löytyy kirjasta [Mo].

Lemma 5.2. *Olkoon $t \in \mathbb{C}, |\Im t| < 1/4$ ja valitaan vakio $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$|\Im t| < \alpha < 1/4. \tag{5.2}$$

Näillä oletuksilla kaikilla $m, n \geq 1$ on voimassa Maassin-Fourierin kertoi-

mien jälkikaava

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} p(t,\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} p(t,r)dr =$$

$$\delta_{m,n}\frac{t}{\pi^2 \sinh \pi t} + \frac{2t}{\pi \sinh \pi t}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l)\varpi(t, \frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}), \quad (5.3)$$

missä

$$p(t,r) = \frac{\cosh \pi r}{\cosh(\pi(t+r))\cosh(\pi(r-t))}$$

ja

$$\varpi(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{\sin \pi r}{\pi r}\Gamma(r+it)\Gamma(r-it)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2r} dr.$$

TODISTUS. Yhdistetään Poincarén sarjojen sisätulon esitysten (3.5) ja (3.9) oikeat puolet ja sijoitetaan saatuun identiteettiin arvot

$$s_1 = 1+it \text{ ja } s_2 = 1-it, \text{ missä } |\Im t| < 1/4. \quad (5.4)$$

Gammarykelmä Θ-funktiossa saadaan toiseen muotoon kaavaa (1.4) ja tietoa $\sin(\pi(1/2+it)) = \cosh(\pi t)$ käyttäen:

$$\begin{aligned}\Theta(1+it, 1-it; r) &= \Gamma(1/2+i(t+r))\Gamma(1/2+i(r-t)) \\ &\quad\times \Gamma(1/2-i(r-t))\Gamma(1/2-i(t+r)) \\ &= \frac{\pi}{\cosh(\pi(t+r))}\frac{\pi}{\cosh(\pi(r-t))}.\end{aligned}$$

Käytetään vielä hyväksi kaavoja (1.3) ja (1.4), jolloin saadaan $\Gamma(1+it)\Gamma(1-it) = (\pi t)/\sinh(\pi t)$ ja sievennetään W-funktiota:

$$\begin{aligned}W(x;1+it,1-it) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\eta-2it)}{\Gamma(1+\eta-it)\Gamma(1-\eta+it)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2\eta} d\eta \overset{\eta=r+it}{=} \\ &\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2it}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha')} \frac{\sin \pi r}{\pi r}\Gamma(r+it)\Gamma(r-it)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2r} dr,\end{aligned}$$

missä $\alpha' = \alpha - \Im t$.

Tämä kaikki yhdistäen ja lopuksi yhtälön eri puolten vastaavat tekijät poistaen saadaan haluttu identiteetti. □

Seuraavana esitettävä lause on eräs spektraaliteorian ja tämän esityksen tärkeimmistä tuloksista. Se esittää automorfifunktioita vastaavat spektrin osat Kloostermanin summien summina. Toisaalta se voidaan myös tulkita Maassin-Fourierin kertoimien jälkilausekkeen arvioksi, jossa Kloostermanin summat muodostavat päätermin ja jatkuvan spektrin osa ja diagonaalitermi toimivat virheterminä. Kuten sovelluksissa usein tuleekin tarpeeseen, lausekkeissa on mukana jyrkkiä vaihteluita tasoittava painofunktio.

Lause 5.3 (Jälkikaava). *Oletetaan, että funktio f täyttää ehdot*

$$\begin{cases} f(x) \text{ on säännöllinen vyössä } |\Im x| \leq 1/2, \\ f(x) = f(-x) \text{ ja} \\ |f(x)| \ll (1+|x|)^{-2-\delta}, \end{cases} \tag{5.5}$$

missä $\delta > 0$ on mielivaltaisen pieni vakio. Olkoon lisäksi $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ja

$$f_+(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{\cosh(\pi r)} J_{2ir}(x) f(r) dr.$$

Tällöin on voimassa yleistetty jälkikaava

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} f(\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} f(r)dr =$$
$$\frac{1}{\pi^2}\delta_{m,n}\int_{-\infty}^{\infty} r\tanh(\pi r) f(r) dr + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l) f_+(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}). \tag{5.6}$$

Todistus. Kuten välittömästi huomataan, tavoitteena on periaatteessa vain korvata tarkkaan määritelty funktio $p(t,r)$ yleisellä tasoitusfunktiolla $f(r)$ kaavassa (5.3). Tämä tapahtuu yllättävällä tavalla. Funktion $p(t,r)$ rakenne on nimittäin sellainen, että toimiessaan tietyn integraalimuunnoksen ytimenä se pitää muunnettavat funktiot oleellisesti paikoillaan. Tämän huomion jälkeen lauseen yhtälöä (5.6) varten tarvitsee enää muokata lausekkeista esiin Besselin funktioita. Kyseinen integraalimuunnos saadaan esiin kertomalla yhtälön (5.3) molemmat puolet tekijällä $\cosh(\pi t) f(t+i/2)$, jonka jälkeen yhtälön puolet integroidaan t:n suhteen yli koko reaaliakselin.

Osoitetaan suuruusarvion

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\cosh(\pi t) f(t+i/2) p(t,r)| dt \ll (1+|r|)^{-2-\delta}$$

voimassaolo. Ilmeisesti integrointivälinä riittää tarkastella väliä $(0,\infty)$. Väleillä (r,∞) ja $(r/2,r)$ riittää käyttää arviota (5.5). Lisäksi välillä $(0,r/2)$ integraalia hallitsee tekijä $e^{-\pi r/2}$.

Pistespektrin termin huomataan suppenevan itseisesti tämän suuruusarvion perusteella, kun käytetään osittaissummausta ja arviota (5.1). Jatkuvan spektrin termin itseinen suppeneminen seuraa zeta-funktion arviosta (1.13). Niinpä näissä termeissä t-integrointi voidaan suorittaa ensin, jolloin laskettavaksi ilmestyy integraali

$$\int_{\mathbb{R}} \cosh(\pi t) f(t+i/2) p(t,r) dt, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Tarkoituksena on siirtää seuraavaksi integrointi tielle $\Im t = -1/2$. Integrandilla on yksinkertaiset navat pisteissä $t = \pm r - i/2$, joten napojen kohdalla annetaan uuden integrointitien tehdä pienet negatiiviseen suuntaan tien yläpuolella kulkevat puoliympyrät. Funktion $f(t)$ parillisuudesta ja hyperbelikosinin yhteenlaskukaavoista huomataan helposti, että integrandin arvot pisteissä $\pm k - i/2, k \in \mathbb{R}$ kumoavat toisensa, joten nämä osat integraalista katoavat. Jäljelle jää siis vain kahden puoliympyrän muodostama osio. Sijoittamalla $t = k - i/2$ tämä muuttuu muotoon

$$\left(\int_{\mathcal{C}(r)} + \int_{\mathcal{C}(-r)} \right) \frac{i \sinh(\pi k) \cosh(\pi r)}{\sinh(\pi(k+r)) \sinh(\pi(k-r))} f(k) dk, \tag{5.7}$$

missä tien $\mathcal{C}(x)$ reitti on $\gamma_x(m) = x + \delta e^{i\pi(1-m)}, m \in [0,1]$ ja $\delta > 0$ on jokin pieni vakio. Tässä integraali on sopivasti pariton, joten jälkimmäinen tie voidaan vaihtaa puoliympyräksi, joka yhdessä $\mathcal{C}(r)$:n kanssa muodostaa täyden ympyrän negatiiviseen suuntaan pisteen r ympäri. Tämä integraali voidaan välittömästi arvioida residylauseen avulla, jolloin tuloksena saadaan

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\pi t) f(t+i/2) p(t,r) dt, \tag{5.8}$$

mikä todentaa funktion $p(t,r)$ edellä mainitun ominaisuuden. Samalla saamme tulokseksi yhtälön (5.6) vasemman puolen.

Myös yhtälön oikealla puolella on tarkoitus suorittaa ensin integrointi t:n suhteen. Diagonaalitermin käsittelyksi riittää sijoitus $r = t + i/2$ integraaliin, joten voimme keskittyä Kloostermanin summien summatermiin. Käyttämällä Weilin rajaa (1.2), Stirlingin kaavaa (1.10) ja arviota (5.5) saadaan sille arvio

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{(\alpha)}|\dots|d\eta\,dt \ll \sum_{l=1}^{\infty} l^{2\alpha-2}l^{1/2+\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{-1-\delta}(1+|u|)^{-1}$$
$$\times((1+|t-u|)(1+|t+u|))^{\alpha-1/2}\exp(\pi|u|-\pi(|t-u|+|t+u|)/2)dt\,du.$$

Tämä lauseke on olemassa äärellisenä, kun $0<\alpha<1/4$. Niinpä t-integrointi voidaan Fubinin-Tonellin lauseen perusteella suorittaa ensimmäisenä ja summalauseke saa muodon

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,n;l)C(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn},f), \tag{5.9}$$

missä

$$C(x,f)=\frac{1}{\pi^2 i}\int_{(\alpha)}\frac{\sin\pi\eta}{\pi\eta}D(\eta,f)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta}d\eta$$

sekä

$$D(\eta,f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{\tanh\pi t}\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)f(t+i/2)dt.$$

Oletetaan tilapäisesti, että $\Re\eta>1/2$. Funktio $D(\eta,f)$ on säännöllinen, kun $\Re\eta>0$ ja lisäksi sen integraaliesityksen integrandi on luokkaa $\mathcal{O}(e^{-\pi t/2})$, kun $|t|\to\infty$ alueessa $|\Im t|\le 1/2$, joten integrointi voidaan siirtää tielle $\Im t=-1/2$. Integrointi siirretään kuitenkin heti takaisin reaaliakselille sijoittamalla $t=k-i/2$. Kun huomioidaan $f(t)$:n parillisuus ja käytetään kaavoja (1.3) ja (1.4) joitain kertoja, saadaan tästä

$$\begin{aligned}D(\eta,f)&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)\tanh(\pi k)\Big((k-i/2)\Gamma(\eta+1/2+ik)\Gamma(\eta-1/2-ik)\\&\quad+(k+i/2)\Gamma(\eta+1/2-ik)\Gamma(\eta-1/2+ik)\Big)dk\\&=\eta\int_{-\infty}^{\infty}kf(k)\tanh(\pi k)\Gamma(\eta-1/2+ik)\Gamma(\eta-1/2-ik)dk\\&=\frac{\pi i\eta}{2\sin\pi\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kf(k)}{\cosh\pi k}\Big(\frac{\Gamma(\eta-1/2+ik)}{\Gamma(3/2-\eta+ik)}-\frac{\Gamma(\eta-1/2-ik)}{\Gamma(3/2-\eta-ik)}\Big)dk\\&=\frac{\pi i\eta}{\sin\pi\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kf(k)}{\cosh\pi k}\frac{\Gamma(\eta-1/2+ik)}{\Gamma(3/2-\eta+ik)}dk.\end{aligned}$$

Viimeisessä integraalissa integrointi voidaan ongelmitta siirtää suoralle $\Im k = -\beta, 0 < \beta < 1/2$. Tästä seuraava $D(\eta, f)$:n esitys voidaan jatkaa analyyttisesti alueeseen $\Re\eta > 1/2 - \beta$. Tällöin tuloksena on yhtälö

$$C(x,f) = \frac{1}{\pi^2}\int_{(\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-2\eta}\int_{\Im t=-\beta}\frac{tf(t)}{\cosh\pi t}\frac{\Gamma(\eta-1/2+it)}{\Gamma(3/2-\eta+it)}dt\,d\eta,$$

kun $\alpha + \beta > 1/2$. Tämän kaksoisintegraalin integrandille saadaan Stirlingin kaavan (1.10) avulla yläraja $\mathcal{O}(|t|^{-1-\delta}(|\eta| - |t|)^{2\alpha-2})$, joten olettamalla $\alpha < 1/2$ integrointijärjestystä voidaan vaihtaa Fubinin-Tonellin lauseen perusteella. Käyttämällä kaavaa (1.16) saadaan tällöin

$$C(x,f) = \frac{2i}{\pi}\int_{\Im t=-\beta}\frac{tf(t)}{\cosh\pi t}J_{2it}(x)dt.$$

Kuitenkin tässä integrointi voidaan siirtää reaaliakselille arvioimalla integrandia Besselin J-funktion esityksen (1.15) avulla. Sijoittamalla tämän siirron tulos lausekkeeseen (5.9) saadaan tulokseksi viimeinenkin tavoitellun yhtälön (5.6) termeistä. $\square$

5.2 Summakaava

Edellisen osion tavoitteena oli esittää Maassin-Fourierin kertoimien sarja Kloostermanin summien avulla. Seuraavana tavoitteena on tämän yhteyden kääntäminen toisin päin. Samalla yhteys yhdistää holomorfisten ja automorfisten kärkimuotojen jälkikaavoissa esiintyvät spektrin osat yhteen. Näin tehtäessä päästään myös kokonaan eroon diagonaalitermeistä. Tulos muotoillaan erityisen Kloostermanin summista muodostuvan Dirichlet'n sarjan avulla.

Määritelmä 5.4. Kaikille luvuille $m, n \in \mathbb{Z}_+$ määritellään *Kloostermanin zeta-funktio*

$$Z_{m,n}(s) = (2\pi\sqrt{mn})^{2s-1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{S(m,n;l)}{l^{2s}}.$$

Tämän tasoitettu versio on

$$K_{\pm}(m,n;\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,\pm n;l)\varphi(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}),$$

missä mukaan otettu $\varphi(x)$ on jokin sileä painofunktio.

Kloostermanin summat esiintyvät erittäin laajalti lukuteoriassa ja tämän vuoksi niiden summan uusi esitysmuoto olisikin erittäin hyödyllinen. Kuten yleensäkin, sovelluksissa tarvitaan usein summaa, jota on tasoitettu sileällä painofunktiolla ja siispä myös seuraavassa ensisijainen tavoite on löytää uusi esitys funktioille $K_{\pm}(m, n; \varphi)$, kun φ toteuttaa tietyt sileys- ja säännöllisyysehdot. Käytännön seikoista johtuen (Poincarén sarjat P_m määriteltiin vain ei-negatiivisille luvuille m.) positiivisen ja negatiivisen merkin tapaukset joudutaan käsittelemään erikseen. Aluksi käsitellään positiivisen merkin tilanne.

Ensimmäisenä tehtävänä matkalla kohti tätä tavoitetta on sopivan esityksen kehittäminen Kloostermanin zeta-funktiolle. Kuten edellisessä osiossa, painofunktio φ otetaan mukaan käsittelyyn vasta tämän jälkeen, tälläkin kertaa integraalimuunnoksen avulla.

Seuraava lemma antaa jo ensimmäiset viitteet tulevasta yhteenliitoksesta kertoimien $\rho_j(n)$ ja $\rho_{j,k}(n)$ välillä. Manipulaatioista ilmestyy nimittäin esiin Peterssonin jälkikaavasta tuttu $q_{m,n}(k)$.

Lemma 5.5. *Merkitään $\rho_j(n)$:llä Maassin-Fourierin kertoimia ja olkoon $q_{m,n}(k)$ kuten määritelmässä (4.3). Tällöin kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}_+$ ja $\Re s > 3/4$ on voimassa*

$$\begin{aligned} Z_{m,n}(s) &= \frac{1}{2}\sin(\pi s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh \pi\kappa_j}\,\Gamma(s-1/2+i\kappa_j)\Gamma(s-1/2-i\kappa_j) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\sin(\pi s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\,\Gamma(s-1/2+ir)\Gamma(s-1/2-ir)\,dr \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)q_{m,n}(2k)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)} - \frac{1}{2\pi}\,\delta_{m,n}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Todistus. Sijoitetaan kaavaan (3.5) arvot $s_1 = 1,\ s_2 = s$ vaatien samalla $\Re s > 1 - \alpha$, missä $0 < \alpha < 1/4$. Funktion

$$W(x; 1, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\frac{\Gamma(\eta)}{(\eta+s-1)\Gamma(1-\eta)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2\eta}d\eta$$

integrandi muunnetaan Besselin funktioiden summaksi yhtälön (1.3) avulla:

$$\frac{\Gamma(k+s)\Gamma(k+\eta)}{\Gamma(k+1-s)\Gamma(k+1-\eta)} - \frac{\Gamma(k-1+s)\Gamma(k-1+\eta)}{\Gamma(k-s)\Gamma(k-\eta)} =$$

$$(\eta+s-1)(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)\Gamma(k-1+\eta)}{\Gamma(k+1-s)\Gamma(k+1-\eta)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(\eta)}{(\eta+s-1)\Gamma(1-s)\Gamma(1-\eta)} = \frac{\Gamma(K+s)\Gamma(K+\eta)}{(\eta+s-1)\Gamma(K+1-s)\Gamma(K+1-\eta)} - \sum_{k=1}^{K}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)\Gamma(k-1+\eta)}{\Gamma(k+1-s)\Gamma(k+1-\eta)}.$$

Käyttämällä seuraavaksi Besselin J-funktion esitystä (1.16) saavutaan esitykseen

$$\forall K \in \mathbb{Z}_+ : \quad \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}W(x;1,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{\Gamma(K+s)\Gamma(K+\eta)}{(\eta+s-1)\Gamma(K+1-s)\Gamma(K+1-\eta)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\eta} d\eta - \frac{2}{x}\sum_{k=1}^{K}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}J_{2k-1}(x).$$

Tutkitaan integraalia, kun $K \to \infty$. Valitaan jokin suurehko positiivinen vakio $\beta, \Re s - 1 < \beta < K$ ja siirretään edellisessä kaavassa integrointi tielle $\Re\eta = -\beta$. Väliin jäävässä alueessa integrandilla on napa pisteessä $\eta = 1-s$, jossa residy on $(x/2)^{2s-2}$. Integrandi suoralla $\Re\eta = -\beta$ on Stirlingin kaavan (1.9) mukaan kokoluokkaa $\mathcal{O}(K^{2\Re s-1}(K+|\eta|)^{-2\beta-1})$, joten integraali tätä suoraa pitkin katoaa K:n lähestyessä ääretöntä. Täten on siis itse asiassa

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}W(x;1,s) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-2} - \frac{2}{x}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}J_{2k-1}(x).$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön $x = 4\pi\sqrt{mn}/l$, kertomalla molemmat puolet lausekkeella $2\pi\sqrt{mn}S(m,n;l)/l^2$ ja summaamalla nämä yhteen kaikilla $l \in \mathbb{Z}_+$ saadaan

$$Z_{m,n}(s) = 2\pi\sqrt{mn}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}S(m,n;l)W(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn};1,s) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}S(m,n;l)\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}J_{2k-1}(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}).$$

Kaksoissumman itseinen suppeneminen tässä huomataan välittömästi Besselin J-funktion arvion (1.17) avulla, joten kaavoja (3.5) ja (4.3) käyttämällä sekä ilmestyvää Θ-funktiota jälleen (1.4):n avulla muokaten päädytään muotoon

$$\begin{aligned}Z_{m,n}(s) &= 2\sqrt{mn}(4\pi n)^{s-1}\langle P_m(\cdot,1), P_n(\cdot,\bar{s})\rangle/\Gamma(1-s)\\ &\quad+\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)q_{m,n}(2k)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}-\frac{\delta_{m,n}}{2\pi}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}.\end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän taasen sisätulon vaihtoehtoinen kaava (3.9) päädytään lemman väitteeseen. $\square$

Seuraavaksi keskitytään tasoitettuun summaan $K_+(m,n;\varphi)$, jota varten määritellään ensin sopiva integraalimuunnos.

Määritelmä 5.6. Määritellään funktioiden $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ avaruudessa Mellinin muunnokseen liittyvä tähtioperaattori:

$$^*: f\mapsto f^*,\quad f^*(s)=\int_0^\infty f(x)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2s}dx,\quad s\in\mathbb{C}. \tag{5.11}$$

Kuten helposti huomataan, $f^* = 2^{2s}(\mathrm{M}f)(-2s+1)$, missä $\mathrm{M}f$ merkitsee funktion f Mellinin muunnosta.

Lemma 5.7. *Valitaan funktio $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ja $\alpha\in\mathbb{R}$ siten, että integraali*

$$\int_0^\infty x^{-2\alpha}|\varphi(x)|dx \tag{5.12}$$

suppenee. Tällöin kaikilla $m,n\geq 1$ on voimassa integraalimuunnos

$$K_+(m,n;\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}Z_{m,n}(s)\varphi^*(s)ds. \tag{5.13}$$

Todistus. Sijoitetaan yhtälö $\varphi^*(s) = 2^{2s}(\mathrm{M}\varphi)(-2s+1)$ väitteen oikeaan puoleen ja vaihdetaan zeta-funktion summauksen ja s-integroinnin järjestystä. Lopulta sijoitetaan integraaliin $-2s+1=r$, jolloin väite seuraa Mellinin muunnoksen määritelmästä. $\square$

Tarkoituksena on ujuttaa painofunktio φ summakaavaan (5.10) edellisen lemman Mellinin muunnoksen (5.13) avulla. Tätä varten φ:lle tulee asettaa joitain rajoitteita, jotka varmistavat tuloksena syntyvän lausekkeen olemassaolon. Oletetaan siis, että $\varphi \in C^3(0,\infty)$ ja sille ja sen derivaatoille pätevät suuruusarviot

$$\varphi^{(n)}(x) \ll \begin{cases} x^{1/2-n+\varepsilon} & \text{, kun } x \to 0+, \\ x^{-1-n-\varepsilon} & \text{, kun } x \to \infty, \end{cases} \tag{5.14}$$

missä $\varepsilon > 0$ on mielivaltaisen pieni vakio ja $n = 0, 1, 2, 3$.

Tähän mennessä olemme onnistuneet saamaan aikaan paljolti toisiaan muistuttavia teorian kappaleita sekä automorfisille että holomorfisille kärkimuodoille. Seuraavana vuorossa on näiden kahden samankaltaisen teorian yhdistäminen. Seurauksena tästä on, mitäpä muutakaan kuin Kloostermanin summia. Tässä Kuznetsovin summakaavaksi nimeämässä lauseessa tehosekoittimeen laitetaan molempien kärkimuotoavaruuksien spektrit (mutta ei diagonaalitermejä), jolloin lopputuloksena saadaan Kloostermanin summien summa $K_+(m,n,\varphi)$. Tulosta kutsutaan ilmeisistä syistä myös funktion $K_+(m,n;\varphi)$ spektraalihajotelmaksi.

Lause 5.8 (Summakaava). *Valitaan kertoimet $\rho_j(n)$ ja $\rho_{j,k}(n)$ kuten esityksissä* (2.1) *ja* (4.1) *ja olkoon $a(k)$ kuten Peterssonin jälkikaavassa 4.3. Vaaditaan lisäksi, että painofunktio φ täyttää ehdot* (5.14)*. Tällöin $\forall m,n \in \mathbb{Z}_+$:*

$$\begin{aligned} K_+(m,n;\varphi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh \pi\kappa_j}\varphi^+(\kappa_j) \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\varphi^+(r)dr \\ &+ 2\sum_{k=1}^{\infty} a(2k) \sum_{j=1}^{\vartheta(2k)} \overline{\rho_{j,2k}(m)}\rho_{j,2k}(n)\varphi^+(i/2-ki), \end{aligned} \tag{5.15}$$

missä

$$\varphi^+(r) = \frac{\pi i}{2\sinh \pi r}\int_0^{\infty} (J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x))\varphi(x)\frac{dx}{x}.$$

Todistus. Funktio φ^* on säännöllinen alueessa

$$-\varepsilon/2 < \Re s < 3/4 + \varepsilon/2, \tag{5.16}$$

kun oletukset (5.14) ovat voimassa. Osittaisintegroimalla kolmesti φ^*:n määritelmää saadaan sille suuruusarvio

$$\varphi^*(s) \ll (1+|s|)^{-3}. \tag{5.17}$$

Erityisesti siis on voimassa Mellinin käänteismuunnos

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \varphi^*(s)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s-1} ds,$$

kun $\alpha = \Re s$ kuuluu väliin (5.16). Tästä ja Weilin rajasta (1.2) seuraa, että integraalimuunnos (5.13) on olemassa, kun

$$3/4 < \alpha < 3/4 + \varepsilon/2. \tag{5.18}$$

Sijoittamalla nyt (5.10) yhtälöön (5.13) saadaan ainakin symbolisesti jo lupaavan näköinen yhteys:

$$\begin{aligned} K_+(m,n;\varphi) = &\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh \pi\kappa_j} \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \varphi^*(s) h(s,\kappa_j)\, ds \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \varphi^*(s) h(s,r) ds\, dr \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) q_{m,n}(2k) \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \varphi^*(s) \frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}\, ds \\ &- \frac{\delta_{m,n}}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \varphi^*(s)\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\, ds, \end{aligned} \tag{5.19}$$

missä

$$h(s,r) = \frac{1}{2}\sin(\pi s)\Gamma(s-1/2+ir)\Gamma(s-1/2-ir).$$

Tässä tehdyn integrointijärjestyksen vaihdon oikeellisuus tulee kuitenkin vielä tarkistaa. Stirlingin kaavasta ja (5.17):sta seuraa

$$\begin{aligned} \varphi^*(s)h(s,r) \ll \exp\big(-\pi(|t+r|+|t-r|-2|t|)/2\big)\times \\ ((1+|t+r|)(1+|t-r|))^{\alpha-1}(1+|t|)^{-3}. \end{aligned}$$

Tämän kokoarvion avulla huomataan (5.19):n termien suppenevan itseisesti:

$$\int_{(\alpha)} |\varphi^*(s)h(s,r)||ds| \ll (1+|r|)^{2\alpha-4} \quad \text{ja}$$

$$\int_{(\alpha)} |\varphi^*(s)\frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)}||ds| \ll k^{2\alpha-2}.$$

Arvion (5.1) avulla nähdään nyt esityksen ensimmäisen termin olemassaolo, kunhan ehto (5.18) on voimassa. Samoin ehdoin toisen termin kaksoisintegraali suppenee itseisesti, kuten myös kolmannen termin summa $q_{m,n}(k)$:n määritelmän (4.3) sekä Besselin J-funktion arvion (1.17) avulla.

Todistuksen lopuksi tulee vielä osoittaa termien sisällä olevien integraalien muuntuminen φ^+-funktioiksi. Itse asiassa seuraavassa huomataan, että (5.19):n oikean puolen kahden viimeisen termin gamma-funktioita sisältävät integraalit kumoavat osin toisensa ja jäljelle jää vain integraaleja $\int \varphi^* h$. Kaikille $K \in \mathbb{Z}_+$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} \\
&= \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k-1} \Big(\frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(k+1-s)} + \frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k-s)} \Big) + (-1)^K \frac{\Gamma(K+s)}{\Gamma(K+1-s)} \\
&= \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k-1} (2k-1) \frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)} + (-1)^K \frac{\Gamma(K+s)}{\Gamma(K+1-s)}.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi tämä yhtälö kerrotaan puolittain $\varphi^*(s)$:llä ja tulos integroidaan yli pystyakselin $\Re s = \alpha$. Siirtämällä viimeisessä integraalissa integrointitie akselille $\Re s = 0$ huomataan, että se katoaa K:n lähestyessä ääretöntä. Jäljelle jää siis yhtälö

$$\int_{(\alpha)} \varphi^*(s) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} ds = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (2k-1) \int_{(\alpha)} \varphi^*(s) \frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)} ds.$$

Sijoittamalla kertoimen $q_{m,n}(2k)$ jälkiesitys (4.4) yhtälöön (5.19) huomataan täten, että esityksen kaksi viimeistä termiä ovat yhteensä

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a(2k) \sum_{j=1}^{\vartheta(2k)} \overline{\rho_{j,2k}(m)} \rho_{j,2k}(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha)} \varphi^*(s) \frac{\Gamma(k-1+s)}{\Gamma(k+1-s)} ds.$$

Tässä esiintyvä integraali muunnetaan vielä muissa termeissä esiintyvien integraalien kanssa yhtenäiseen muotoon ottamalla käyttöön funktio

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{8 \sinh \pi r} \int_{(\alpha)} \varphi^*(s) \frac{\Gamma(s - 1/2 + ir)}{\Gamma(3/2 - s + ir)} ds$$

ja huomaamalla (1.4):n ja pienen trigonometrisen pyörittelyn seurauksena, että

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)}\varphi^*(s)h(s,r)ds = u(r,\varphi)+u(-r,\varphi).$$

Nyt siis esitys saadaan yhtenäistettyä muotoon

$$\begin{aligned}
K_+(m,n;\varphi) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(n)}{\cosh\pi\kappa_j}(u(\kappa_j,\varphi)+u(-\kappa_j,\varphi)) \\
&+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}(u(r,\varphi)+u(-r,\varphi))\,dr \\
&+4\sum_{k=1}^{\infty}a(2k)\sum_{j=1}^{\vartheta(2k)}\overline{\rho_{j,2k}(m)}\rho_{j,2k}(n)u(i/2-ki,\varphi). \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Muunnetaan $u(r,\varphi)$:tä, kun $r\in\mathbb{R}$. Funktio on säännöllinen, kun $\Im r<\alpha-1/2$. Oletetaan tilapäisesti, että $\Im r=-1/4$. Tällöin integrointi $u(r,\varphi)$:n määritelmässä voidaan siirtää suoralle $\Re s=1/3$. Sijoitettaessa tähän φ^*:n määritelmä yhtälöstä (5.11) tuloksena on itseisesti suppeneva integraali, joka muuntuu integrointijärjestyksen vaihdolla ja esityksen (1.16) avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{1}{8\sinh\pi r}\int_0^{\infty}\varphi(x)\int_{(1/3)}\frac{\Gamma(s-1/2+ir)}{\Gamma(3/2-s+ir)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2s}dsdx \\
&= \frac{\pi i}{2\sinh\pi r}\int_0^{\infty}J_{2ir}(x)\varphi(x)\frac{dx}{x}. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Tämä viimeinen integraali on esityksen (1.15) ja arvion (5.14) perusteella säännöllinen alueessa $-1/2<\Im r<1/4$. Siispä yhtälö (5.21) voidaan jatkaa analyyttisesti koko reaaliakselille. Sijoittamalla kaava (5.21) yhtälöön (5.20) saadaan automorfisten kärkimuotojen termit vastaamaan väitettä.

Esitys (5.21) on voimassa myös, kun $r=i/2-ki,\ k\in\mathbb{Z}_+$. Tämä todistetaan samalla tavalla kuin tapaus $r\in\mathbb{R}$, mutta tällä kertaa integrointiteiden siirtelyä ja analyyttista jatkamista ei tarvita. Besselin J-funktion määritelmästä seuraa suoraan kaava $J_\nu=(-1)^\nu J_{-\nu}$, mistä seuraa yhteys $2u(i/2-ki,\varphi)=\varphi^+(i/2-ki)$. Tätä hyödyntämällä saadaan myös holomorfisten kärkimuotojen termi vastaamaan haluttua. □

6 Vastakkaisen merkin tapaus

Edellisessä luvussa johdettiin Maassin-Fourierin kertoimille jälkikaava ja yhteys toiseen suuntaan kääntämällä spektraalihajotelma muodolle

$$K_+(m,n;\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} S(m,n;l)\varphi(4\pi\sqrt{mn}/l)$$

tapauksessa $m,n \in \mathbb{Z}_+$. Tämä ei kuitenkaan ole koko totuus juuri m:lle ja n:lle asetetun rajoituksen vuoksi. Tässä osiossa tullaan korjaamaan tämä puute etsimällä vastakkaismerkkisten kertoimien jälkikaava ja vastaavanlainen hajotelma funktiolle

$$K_-(m,n;\varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} S(m,-n;l)\varphi(4\pi\sqrt{mn}/l), \quad \text{kun } m,n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tämä ongelma on jossain määrin helpompaa ratkaista, koska hajotelmassa ei tule esiintymään holomorfisia kärkimuotoja vastaavaa osaa. Tämän voi heuristisesti jo arvata sijoittamalla yhtälöön (5.15) $n \in \mathbb{Z}_-$, jolloin viimeinen termi katoaa, koska modulimuotojen negatiiviset Fourier-kertoimet ovat nollia.

Positiivisen merkin tapauksessa teorian perustavana elementtinä oli sisätulon $\langle P_m(\cdot,s_1), P_n(\cdot,\overline{s_2})\rangle$ laskeminen. Jotta n:n merkki saadaan vaihdettua, tulee tätä sisätuloa jotenkin muuntaa, kuitenkin aiheuttamalla mahdollisimman vähän muutoksia muuhun rakenteeseen. Sisätulon määritelmää tarkastelemalla voidaan arvella sisätulon $\langle P_m(\cdot,s_1), \overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle$ olevan hyvä ratkaisu.

Positiivisen merkin tapauksen tavoin eteneminen aloitetaan muodostamalla yhtälöä (5.6) vastaava jälkikaava Maassin-Fourierin kertoimille.

Lause 6.1. *Merkitään jälleen $\rho_j(n)$:llä Maassin-Fourierin kertoimia. Olkoon $m,n \in \mathbb{Z}_+$ ja vaaditaan, että funktio f toteuttaa ehdot* (5.5). *Määritellään muunnos*

$$f_-(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} r\sinh(\pi r)K_{2ir}(x)f(r)dr.$$

Tällöin on voimassa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} f(\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} f(r)dr$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,-n;l) f_-(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}). \tag{6.1}$$

TODISTUS. Tällä kertaa ratkaisu tiivistyy sisätulon $\langle P_m(\cdot,s_1), \overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle$ ympärille (vrt. $\langle P_m(\cdot,s_1), P_n(\cdot,\overline{s_2})\rangle$ positiivisen merkin tapauksessa). Merkinvaihdokset x:n ja y:n kertoimissa aiheuttavat, että yhtälöön (3.5) johtanut päättely antaa nyt hyvin pienin muutoksin (Y_ω:a vastaava funktio yksinkertaistuu hieman) sisätulokaavan

$$\langle P_m(\cdot,s_1), \overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle =$$
$$2^{2(1-s_2)}\pi^{s_1-s_2+1} n^{s_1-s_2} \frac{\Gamma(s_1+s_2-1)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-2s_1} S(m,-n;l) W_-(\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}; s_1, s_2), \tag{6.2}$$

missä

$$W_-(x;s_1,s_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \Gamma(\eta)\Gamma(\eta+s_2-s_1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\eta} d\eta$$

ja voimassa ovat samat lemman 3.3 alussa mainitut ehdot. Vastaavat muutokset Parsevalin kaavan (3.9) todistuksessa antavat spektraalihajotelman

$$\langle P_m(\cdot,s_1), \overline{P_n(\cdot,s_2)}\rangle = \frac{\pi}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} (4\pi\sqrt{mn})^{1-s_1-s_2} \left(\frac{n}{m}\right)^{(s_1-s_2)/2} \times$$
$$\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)\Theta(s_1,s_2;\kappa_j)$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)\cosh(\pi r)\Theta(s_1,s_2;r)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} dr \Bigg) \tag{6.3}$$

samoin ehdoin kuin lemmassa 3.4. Sijoitetaan näihin sisätulon kaavoihin jälleen arvot (5.4), jolloin tuloksena saadaan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)} p(t,\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2} p(t,r)dr$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} S(m,n;l)\varpi_-(t, \frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}),$$

missä

$$\varpi_-(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta} d\eta$$

ja α, t toteuttavat ehdon (5.2).

Kerrotaan nyt yhtälön molemmat puolet tekijällä $\cosh(\pi t) f(t+i/2)$ ja integroidaan t:n suhteen yli reaaliakselin. Tässä voidaan positiivisen merkin tapauksen tavoin viedä t-integrointi sisimmäksi. Otettaessa huomioon yhtälö (5.8) riittää laskea oikealla puolella

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varpi_-(t,x)\cosh(\pi t) f(t+i/2)\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{1-2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\pi t)\Gamma(\eta+it)\Gamma(\eta-it) f(t+i/2)\, dt\, d\eta.$$

Nyt t-integrointia ei kuitenkaan voida välittömästi viedä suoralle $\Im t = -1/2$. Tämä ongelma kierretään huomaamalla, että η-integrointi voidaan siirtää tielle $\Re\eta = \beta = (1+\delta/2)/2$ Stirlingin kaavan (1.10) perusteella. Tämän jälkeen t-integrointi siirretään jälleen tielle $\Im t = -1/2$ ja sijoituksella tuodaan takaisin reaaliakselille. Sisemmän integraalin muokkausta jatketaan vielä:

$$\begin{aligned}
& -i\int_{-\infty}^{\infty} \sinh(\pi t)\Gamma(\eta+it+1/2)\Gamma(\eta-it-1/2) f(t)\, dt \\
\overset{\text{sij. } t=-k}{=} & -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \sinh(\pi t)\Big(\Gamma(\eta+it+1/2)\Gamma(\eta-it-1/2) - \\
& \qquad \Gamma(\eta-it+1/2)\Gamma(\eta+it-1/2)\Big) f(t)\, dt \\
\overset{(1.3)}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} t\sinh(\pi t)\Gamma(\eta+it-1/2)\Gamma(\eta-it-1/2) f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä edellä käsitellyn kaksoisintegraalin sisemmän integraalin paikalle, vaihtamalla integrointijärjestystä ja käyttämällä Besselin K-funktion esitystä (1.20) saadaan väite. □

Seuraavaksi keskitytään muuntamaan summakaava (5.15) vastakkaisen merkin tapaukseen sopivaksi. Ensi istumalta voisi olettaa, että jälkikaavan tavoin tämä tulee tapahtumaan täysin vastaavasti kuin positiivisen merkin tapauksessa. Tämä ei kuitenkaan ole aivan totta, sillä negatiivisen merkin kanssa (5.10):n Kloostermanin zeta-funktioon liittyvä aputulos on hieman erilainen ja se tulee johtaa erikseen. Lisäksi siirtyminen (5.10)-tyyppisestä yhtälöstä itse $K_-(m,n;\varphi)$:hin vaatii yhden lisämutkan. Tilannetta toisaalta helpottaa se, että W_- on itsessään jo lähellä Besselin K-funktiota eikä sitä tarvitse siis esittää W:n tavoin Besselin J-funktioiden sarjana.

Lause 6.2. *Merkitään $\rho_j(n)$:llä Maassin-Fourierin kertoimia ja täyttäköön φ jälleen ehdot* (5.14)*. Merkitään lisäksi*

$$\varphi^-(r) = 2\cosh(\pi r)\int_0^\infty \varphi(x)K_{2ir}(x)\frac{dx}{x}.$$

Tällöin on voimassa Kloostermanin summien summakaava

$$\begin{aligned} K_-(m,n;\varphi) &= \sum_{j=1}^\infty \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh(\pi\kappa_j)}\varphi^-(\kappa_j) \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\varphi^-(r)dr. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Todistus. Käytetään hyväksi tietoa, että kaikki k:nnet Besselin funktiot, $k=\pm 1/2$ ovat helposti alkeisfunktioiden avulla esitettävissä. Tätä ja esitystä (1.20) hyväksi käyttäen saadaan W_- häivytettyä pois:

$$K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x} \Rightarrow W_-(x;s,s+1/2) = \sqrt{\pi}e^{-x}.$$

Samoin sijoittamalla esityksiin (6.2) ja (6.3) $s_1 = s$, $s_2 = s+1/2$, missä $\Re s > 3/4$, saadaan

$$\begin{gathered} (2\pi\sqrt{mn})^{2s-1}\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^{2s}}S(m,-n;l)\exp\Big(-\frac{4\pi}{l}\sqrt{mn}\Big) = \\ \sum_{j=1}^\infty \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh\pi\kappa_j}\lambda(s,\kappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\lambda(s,r)dr, \end{gathered} \tag{6.5}$$

missä kaavojen (1.6) ja (1.23) perusteella

$$\begin{aligned} \lambda(s,r) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cosh(\pi r)\frac{\Theta(s,s+1/2;r)}{\Gamma(2s-1/2)} \\ &= 2^{3-4s}\sqrt{\pi}\cosh(\pi r)\frac{\Gamma(2s-1+2ir)\Gamma(2s-1-2ir)}{\Gamma(2s-1/2)} \\ &= 2\cosh(\pi r)\int_0^\infty e^{-x}K_{2ir}(x)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s-1}\frac{dx}{x}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Yhtälö (6.5) muistuttaa vahvasti yhtälöä (5.10), mutta vasemmalla puolella tässä esiintyvä eksponenttifunktio estää suoraviivaisen $K_-(m,n;\varphi)$:n esiintuonnin. Tämä kierretään sopivalla reaaliakselin painofunktiolla, jolloin voidaan jälleen käyttää lemman 5.7 tavoin Mellinin muunnosta avuksi. Lopulta riittää osoittaa, että painofunktio lähestyy φ_-:sta tietyssä rajaprosessissa.

Aloitetaan valitsemalla $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$-funktio ω_X, kun $X > 0$:

$$\omega_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| \le X, \\ 0, & \text{kun } |x| \ge 2X \end{cases}$$

ja kaikilla kiinnitetyillä $\nu \in \mathbb{Z}_+$: $\omega_X^{(\nu)}(x) \ll X^{-\nu}$. Erityisesti siis $(\exists A \in \mathbb{R})(\forall X \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in \mathbb{R}) : \ |\omega_X(x)| < A$. Tällaisia funktioita luodaan klassisesti konvoluutioiden avulla. Valitaan mielivaltainen $d : X \ll d < X/2$, merkitään $h(x)$:llä välin $[-X-d, X+d]$ karakteristista funktiota ja $\Omega(x)$:llä mielivaltaista $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$-funktiota, jolle

$$\operatorname{supp}\Omega(x) \subset [-1,1] \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}} \Omega(x)dx = 1.$$

Näillä oletuksilla konvoluutio

$$\omega(x) = \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}} \Omega\Big(\frac{y}{d}\Big)h(x-y)dy$$

toteuttaa funktiolle $\omega_X(x)$ asetetut ehdot.

Tämän jälkeen valittu ω_X saa tasoitetun karakteristisen funktion tehtävän määriteltäessä Mellinin muunnosten pari

$$\begin{aligned} \theta_X(x) &= e^x\omega_X(x)\varphi(x) \quad \text{ja} \\ \theta_X^*(s) &= \int_0^\infty \theta_X(x)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2s}dx. \end{aligned}$$

Funktioon θ_X upotettu φ saadaan lisättyä kaavaan (6.5) kertomalla sen molemmat puolet $\theta_X^*(s)/(2\pi i)$:llä ja integroimalla molemmat puolet yli pystyakselin $\Re s = \alpha$, missä α valitaan niin, että integraali (5.12) suppenee. Nyt voidaan jälleen lemman 5.7 tavoin siirtyä $K_-(m,n;\varphi)$:hin oletuksella

$X > 4\pi\sqrt{mn}$, koska tällöin $\theta_X(x)$ vain neutraloi ongelmana olleen eksponentiaalifunktion. Tuloksena näistä toimista on yhtälö

$$\begin{aligned} K_-(m,n;\varphi) = &\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_j(m)}\rho_j(-n)}{\cosh \pi\kappa_j}\lambda_X(\kappa_j) \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\lambda_X(r)dr, \end{aligned} \tag{6.7}$$

missä

$$\lambda_X(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \lambda(s,r)\theta_X^*(s)ds.$$

Kuitenkin (6.6):n ja Mellinin käänteismuunnoksen

$$\theta_X(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \theta_X^*(s)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2s-1}ds$$

perusteella seuraa

$$\lambda_X(r) = 2\cosh(\pi r)\int_0^{\infty} \omega_X(x)\varphi(x)K_{2ir}(x)\frac{dx}{x}.$$

Jäljellä on vielä rajaprosessin $X \to \infty$ tutkiminen. Ensinnäkin esityksestä (1.20) seuraa

$$\begin{aligned} \varphi^-(r) - \lambda_X(r) = 2\cosh(\pi r)\int_0^{\infty}(1-\omega_X(x))\varphi(x)K_{2ir}(x)\frac{dx}{x} = \\ \frac{1}{4\pi i}\cosh(\pi r)\int_{(\beta)}\Gamma(s-1/2+ir)\Gamma(s-1/2-ir)((1-\omega_X)\varphi)^*(s)ds, \end{aligned} \tag{6.8}$$

kun $\beta > 1/2$. Funktio $((1-\omega_X)\varphi)^*(s)$ on säännöllinen alueessa $\Re s \geq -\delta/4$ ehdon (5.14) ja funktion ω_X rajallisuuden vuoksi. Tällöin sille on myös voimassa suuruusarvio

$$((1-\omega_X)\varphi)^*(s) \ll X^{-\delta/2}(1+|s|)^{-3}.$$

Siirretään nyt integraalissa (6.8) integrointi tielle $\Re s = -\delta/4$. Tälläkin kertaa Stirlingin kaava (1.10) osoittaa, että päätyintegraalit lähestyvät nollaa, mutta nyt integrointi siirretään yli gamma-funktion navan pisteissä $s = 1/2 \pm ir$ ja tästä seuraa kaksi residytermiä:

$$
\begin{aligned}
&\varphi^-(r) - \lambda_X(r) = \\
&\quad \frac{1}{4\pi i}\cosh(\pi r)\int_{(-\delta/4)} \Gamma(s-1/2+ir)\Gamma(s-1/2-ir)((1-\omega_X)\varphi)^*(s)ds \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\cosh(\pi r)\Big(((1-\omega_X)\varphi)^*(1/2+ir)\Gamma(2ir) \\
&\qquad\qquad + ((1-\omega_X)\varphi)^*(1/2-ir)\Gamma(-2ir)\Big) \\
&\qquad\qquad \ll X^{-\delta/2}(1+|r|)^{-2-\delta/2}.
\end{aligned}
$$

Viimeistä arviota varten huomataan, että riittää tutkia integraalia, kun $\Im s > 0$. Tämän jälkeen arvio saadaan esimerkiksi osittamalla integrointi väleihin $(0, r/2), (r/2, r-1), (r-1, \infty)$ ja käyttämällä Stirlingin kaavaa sopivasti.

Vaihdetaan tämän arvion perusteella λ_X väitteessä tavoitelluksi φ^-:ksi yhtälössä (6.7). Ottamalla huomioon myös kertoimien $\rho_j(m)$ kasvuvauhti (5.1) huomataan, että syntyvä virhe lähestyy nollaa, kun $X \to \infty$. Näin on väite todistettu. $\square$

7 Kloostermanin summien summa

Weilin raja (1.2) on oiva yläraja Kloostermanin summien koolle ja itse asiassa paras mahdollinen. Kuitenkin summien oskilloiva luonne antaa ymmärtää, että useiden eri Kloostermanin summien summa on todennäköisesti selvästi pienempi kuin triviaali summien itseisarvojen summan antama yläraja. Kun tätä heuristista arvausta ryhdyttiin tutkimaan, huomio kohdistui erityisesti funktioon

$$S_{m,n}(x) = \sum_{l \leq x} l^{-1} S(m,n;l)$$

ja niin kutsuttuun Linnikin-Selbergin otaksumaan, jonka mukaan $S_{m,n}(x) \ll x^{\varepsilon}$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Välittömästi huomataan, että Weilin arviota (1.2) käyttämällä päädytään arvioon $S_{m,n}(x) \ll x^{1/2+\varepsilon}$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Edistystä asiassa ei kuitenkaan tapahtunut ja kesti vuoteen 1980 asti ennen kuin Kuznetsov todisti edellä esitettyjen summakaavojensa avulla ensimmäisen epätriviaalin arvion $S_{m,n}(x)$:lle artikkelissa [Ku].

Kuznetsov todisti arvionsa valitsemalla omassa kaavaa (5.15) vastaavassa yhtälössään sopivan painofunktion φ, jolloin $K_+(m,n;\varphi)$ poikkeaa riittävän vähän $S_{m,n}(x)$:stä. Tämän jälkeen hän arvioi yhtälön loppuja termejä Besselin funktioiden teoriaa käyttäen. Tällä lähestymistavalla tulos on myös yleistetty Kloostermanin summille, jotka liittyvät yleisempiin ryhmän Γ aliryhmiin.

Seuraavassa Kuznetsovin tulos todistetaan kuitenkin Goldfeldin ja Sarnakin artikkelissa [GS] esittelemää tapaa myötäillen, koska se sopii kirjoittajan mielestä paremmin aihetta ympäröivään teoriaan. Tässä lemmassa ja sen todistuksessa ordo-termeihin liittyvät vakiot ovat absoluuttisia.

Lemma 7.1. *Merkitään jälleen $s = \sigma + it$. Kloostermanin zeta-funktion muunnelma*

$$\mathcal{Z}_{m,n}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{S(m,n;l)}{l^{2s}}$$

on holomorfinen alueessa $\sigma > 1/2$ ja tässä alueessa sille on voimassa arvio

$$|\mathcal{Z}_{m,n}(s)| = \mathcal{O}\Big(mn \frac{|s|^{1/2}}{\sigma - 1/2}\Big),$$

kun $t \to \infty$.

TODISTUS. Merkitään $\mathcal{R}_k$:lla Laplacen operaattorin Δ resolventtia $(\Delta - k)^{-1}$ automorfisten kärkimuotojen avaruudessa $L_0^2(\mathcal{F}, d\mu)$. Joko Δ:n Γ-invarianssia Poincarén sarjojen määritelmään käyttäen tai kaavaa (3.3) manipuloimalla saadaan pienellä vaivalla aikaan Poincarén sarjojen rekursiokaava

$$P_m(z, s) = 4\pi m s \mathcal{R}_{s(1-s)}(P_m(z, s+1)), \tag{7.1}$$

joka on voimassa alueessa $\sigma > 1$. Laplacen operaattorin spektraalilauseen 2.5 edellä mainittiin, että Δ:n spektri avaruudessa $L_0^2(\mathcal{F}, d\mu)$ koostuu pelkistä ominaisarvoista, jotka lisäksi lauseen 2.3 mukaan ovat kooltaan vähintään $3\pi^2/2$. Tästä seuraa, että $\mathcal{R}_{s(1-s)}$ on holomorfinen alueessa $\sigma > 1/2$. (Hyvä esitys holomorfisten lineaarioperaattorien teoriasta löytyy lähteestä [RS], luvut 9-11.) Niinpä Poincarén sarja $P_m(z, s)$ voidaan kaavan (7.1) avulla jatkaa analyyttisesti holomorfiseksi funktioksi alueessa $\sigma > 1/2$.

Itseisesti s:n suhteen suppenevina Poincarén sarjoille pätee

$$|P_m(z, s)| = \mathcal{O}(1)$$

alueessa $3/2 \leq \sigma \leq 3$. Lisäksi resolventille on voimassa arvio

$$\|\mathcal{R}_k\| \leq \frac{1}{d(k, \sigma(\Delta))},$$

missä $d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x)$ tavanomaisen $\mathbb{C}$:n metriikan mukaan. Koska $d(s(1-s), \sigma(\Delta)) \geq \Im s(1-s) = |t(2\sigma - 1)|$, Poincarén sarjoille on kaavan (7.1) perusteella voimassa arvio

$$\|P_m(\cdot, s)\|^2 = \int_{\mathcal{F}} |P_m(z, s)|^2 d\mu(z) = \mathcal{O}\Big(\frac{m^2}{(\sigma - 1/2)^2}\Big), \tag{7.2}$$

kun $1/2 < \sigma \leq 2$, $|t| > 1$.

Tarvitsemme lisäksi arvion normille $\|P_n(\cdot, s)\|^2$, kun $\Re s > 5/2$ ja n kasvaa. Tätä varten sijoitetaan $s = s_1 = \overline{s_2}$ Parsevalin kaavaan (3.9) ja käytetään kokoarviota (5.1):

$$\|P_n(\cdot, s)\|^2 \ll n^{1-2\sigma}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j(n)|^2}{e^{2\pi\kappa_j}}((\kappa_j + t)(\kappa_j - t))^{2\sigma-2} + n^2\Big) \ll n^{-2}.$$

Sijoitetaan seuraavaksi sisätulokaavaan (3.8) arvot $s_1 = s > 1$, $s_2 = s+2$ ja käytetään peräkkäin kaavoja (1.21) ja (1.23):

$$\begin{aligned}\langle P_m(\cdot, s), P_n(\cdot, \overline{s}+2)\rangle = \delta_{m,n}(4\pi m)^{-2s-1}\Gamma(2s+1) \\ + 4^{-s-1}\pi^{-1}n^{-2}\frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s)\Gamma(s+2)}\mathcal{Z}_{m,n}(s) \\ + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{S(m,n;l)}{l^{2s}}R_{m,n}(s,l), \qquad (7.3)\end{aligned}$$

missä virheterminä toimii

$$R_{m,n}(s,l) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\frac{\exp(-2\pi ny(1+i\rho))}{(\rho^2+1)^s}\Big(\exp\Big(\frac{-2\pi im(\rho-i)}{l^2y(\rho^2+1)}\Big)-1\Big)d\rho\, dy.$$

Arvioidaan tämän lausekkeen y-integraalia:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} y\exp(-2\pi ny)\Big|\exp\Big(\frac{-2\pi im(\rho-i)}{l^2y(\rho^2+1)}\Big)-1\Big|\,dy \\ &\ll \int_0^{ml^{-2}} y\exp(-2\pi ny)\,dy + \int_{ml^{-2}}^{\infty} y\frac{m\exp(-2\pi ny)}{l^2y}\,dy \ll \frac{m}{nl^2}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$|R_{m,n}(s,l)| \ll \frac{m}{nl^2(\sigma-1/2)}$$

ja lausekkeen

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{S(m,n;l)}{l^{2s}}R_{m,n}(s,l)$$

holomorfisuus alueessa $\sigma > 1/2$, jossa sille on voimassa arvio

$$\mathcal{O}\Big(\frac{m}{n(\sigma-1/2)}\Big).$$

Yhtälön (7.3) vasenta puolta voidaan arvioida Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä ja edellä todistettuja Poincarén sarjojen normien arvioita käyttäen:

$$\langle P_m(\cdot, s), P_n(\cdot, \overline{s}+2)\rangle \ll \frac{m}{n(\sigma-1/2)}.$$

Lemman väite seuraa näistä arvioista, kun otetaan lisäksi huomioon Stirlingin kaavan avulla saatava arvio

$$\Big|\frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s)\Gamma(s+2)}\Big| \ll |t|^{-1/2}.$$

□

Itse päätulos todistetaan hyvin samalla tavalla kuin alkulukulause ja moni muu analyyttisen lukuteorian tulos. Edellisessä lemmassa ratkaisevalle Dirichlet'n sarjalle todistetaan sopiva kokoarvio. Tämän jälkeen kohdesumma esitetään katkaistun Perronin kaavan avulla ja siinä eri osia arvioidaan sopivasti, mistä tulos lopulta seuraa.

Ordo-termeihin liittyvät vakiot lauseen esittelyssä ja todistuksessa voivat riippua enintään luvusta ε.

Lause 7.2. *Kaikilla $\varepsilon > 0$ on voimassa yläraja*

$$S_{m,n}(x) \ll mnx^{1/6+\varepsilon}. \tag{7.4}$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Funktio $\mathcal{Z}_{m,n}((s+1)/2)$ on edellisen lemman perusteella luokkaa $\mathcal{O}(mn|t|^{1/2})$, kun $\sigma = \varepsilon$. Toisaalta se on itseisesti suppenevana Dirichlet'n sarjana luokkaa $\mathcal{O}(1)$ suoralla $1/2+\varepsilon$. Täten Phragménin-Lindelöfin periaatteen 1.2 mukaan

$$\left|\mathcal{Z}_{m,n}\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\right| \ll mn|t|^{1/2-\sigma+\varepsilon},$$

kun $\varepsilon \leq \sigma \leq 1/2+\varepsilon$. Tämän jälkeen esitetään $S_{m,n}(x)$ Perronin kaavan (1.24) avulla käyttäen arvioissa hyväksi Weilin arviota (1.2):

$$S_{m,n}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/2+\varepsilon-iT}^{1/2+\varepsilon+iT} \mathcal{Z}_{m,n}\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\frac{x^s}{s}ds + \mathcal{O}\Big(\frac{x^{1/2+\varepsilon}}{T}\Big).$$

Tehdään oletus $T \ll x$ ja siirretään integrointi suoralle $\Re s = \varepsilon$. Siirrosta koituu virhettä $\mathcal{O}(mnx^{1/2+\varepsilon}/T)$ verran. Integraali suoraa $\Re s = \varepsilon$ pitkin on sen sijaan $\mathcal{O}(mnx^{\varepsilon}T^{1/2})$. Valitaan nyt $T = x^{1/3}$, jolloin kaikki kolme ordotermiä ovat kooltaan $\mathcal{O}(mnx^{1/6+\varepsilon})$. □

Huomautus 7.3. Edellisessä lemmassa ja itse päälauseessa esiintyvää riippuvuutta m:stä ja n:stä on myöhemmin parannettu. Vuonna 1993 E. Yoshida todisti, että ylärajana voidaan käyttää tekijää $\sqrt{|mn|}$. Yleisemmässä tapauksessa, jossa Γ korvataan jollain äärellisindeksisellä Γ:n aliryhmällä, esiin voidaan tuoda myös arvion riippuvuus tämän ryhmän perusalueen mitasta.

Kuten ylläolevasta huomataan, myös Goldfeldin ja Sarnakin todistus käyttää hyödykseen Laplacen operaattorin spektraaliteoriaa, tosin kovin eri tavalla. Goldfeld ja Sarnak eivät todista artikkelissaan $S_{m,n}(x)$:lle tai $\mathcal{Z}_{m,n}(s)$:lle

m:stä ja n:stä riippuvaa arviota, ja edellä esitetty todistus tälle riippuvuudelle lienee uusi. Lisäksi lemman 7.1 todistuksessa resolventtioperaattori osoitetaan holomorfiseksi tukeutuen suoraan sen kompaktisuuteen automorfisten kärkimuotojen avaruudessa. Goldfeld ja Sarnak osoittavat tämän saman viittaamalla yleisiin Selbergin työn [Se] tuloksiin.

Lause 7.2 voidaan yleistää Kloostermanin summille, jotka liittyvät mielivaltaiseen Γ:n äärellisindeksiseen aliryhmään. Tällöin kuitenkin mukaan astuvat Dirichlet'n L-funktioiden poikkeuksellisten nollakohtien tavoin Δ:n mahdolliset poikkeukselliset ominaisarvot $\mu_j = s_j(1-s_j), s_j \in (1/2, 1)$. Näistä seuraa kaavaan (7.4) termejä $\alpha_j x^{2s_j-1}$, missä lukujen α_j arvot tunnetaan eksaktisti.

Kuitenkin luvuista s_j tiedetään runsaasti enemmän kuin L-funktioiden poikkeuksellisista nollakohdista. Esimerkiksi Γ:n niin sanotuille kongruenssialiryhmille tunnetaan kvasi-Riemannin hypoteesin kaltainen yläraja $s_j \leq 39/64$, kun taas L-funktioiden poikkeuksellisille nollakohdille ei tunneta mitään ykköstä pienempää ylärajaa. Erityisesti Riemannin hypoteesia vastaava Selbergin olettama sanoo, että kongruenssiryhmien kohdalla poikkeuksellisia ominaisarvoja ei ole olemassa, jolloin kaikki ominaisarvot sijaitsevat suoralla $\Re s_j = 1/2$.

Samoin kuin L-funktioiden teoriassa, ratkaisevan tärkeää lauseen 7.2 parannusten kannalta olisi tarkempien arvioiden saaminen Kloostermanin zetafunktiolle t:n kasvaessa vyössä $1/2 < \sigma < 1$. Päinvastoin kuin L-funktioiden tapauksessa, tällaisia tuloksia ei kuitenkaan tunneta. Syynä tähän on varmasti osaltaan tutkimuksen vähäisyys verrattuna L-funktioiden ympärillä käyvään kehitykseen.

Toisaalta poikkeuksellisista ominaisarvoista seuraava Kloostermanin zetafunktion navoista vapaa alue on nykytietojen valossa radikaalisti vastaavaa L-funktioiden (ja erityisesti Riemannin zeta-funktion) nollakohtavapaata aluetta suurempi. Tämä asia kertoo Kloostermanin summien tietystä erityisasemasta lukuteoreettisten funktioiden sankassa joukossa ja niiden tehokkuudesta modernin lukuteorian työkaluina.

Kirjallisuutta

[Ap] T. M. Apostol: *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[Ar] W. Arveson: *Short course on spectral theory*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Bi] M. S. Birman, M. Z. Solomjak: *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Reidel, Dordrecht, 1987.

[Br] J. Brüdern: *Einführung in die analytische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, Berliini, 1995.

[GS] D. Goldfeld, P. Sarnak: *Sums of Kloosterman sums*, Invent. Math. 71 (1983), nro 2, s. 243-250.

[Hi] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi: *Higher transcendental functions, Volume II*, McGraw-Hill, USA, 1953.

[HR] G. H. Hardy, M. Riesz: *The general theory of Dirichlet series*, Stechert-Hafner, New York, 1964.

[HW] G. H. Hardy, E. M. Wright: *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, New York, 1979.

[He] G. Helmberg: *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North-Holland, Amsterdam, 1969.

[Iw1] H. Iwaniec: *Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1995.

[Iw2] H. Iwaniec: *Topics in classical automorphic forms*, American Mathematical Society, Providence (RI), 1997.

[IK] H. Iwaniec, E. Kowalski: *Analytic number theory*, American Mathematical Society, USA, 2004.

[Ju1] M. Jutila: *Convolutions of Fourier coefficients of cusp forms*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 65 (79) (1999), s. 31-51.

[Ju2] M. Jutila: *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, Springer-Verlag, Berliini, 1987.

[KK] M. Koecher, A. Krieg: *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer-Verlag, Italia, 1998.

[Ku] N. V. Kuznetsov: *Petersson hypothesis for parabolic forms of weight zero and Linnik hypothesis. Sums of Kloosterman sums* (venäjäksi), Math. Sbornik 111 (153 nro 3) (1980), s. 334-383.

[Le] N. N. Lebedev: *Special functions and their applications*, Dover Publications, New York, 1972.

[Ma] H. Maass: *Lectures on modular functions of one complex variable*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

[Mo] Y. Motohashi: *Spectral theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.

[Ni] N. Nielsen: *Die Gammafunktion*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965.

[RS] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: *Functional analysis*, Ungar, New York, 1955.

[Se] A. Selberg: *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math. VIII s. 1–15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1965.

[Vä] K. Väisälä: *Vektorianalyysi*, Werner Söderström, Porvoo, 1968.

[Wa] G. N. Watson: *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[WW] E. T. Whittaker, G. N. Watson: *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Lontoo, 1950.